Numerik (Teil 2)

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Mittwoch, den 4. Mai 2016, 13 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann reduzibel ist, wenn eine Permutationsmatrix $P \in \{0,1\}^{n\times n}$ existiert, so dass

$$PAP^\top = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

mit geeigneten Matrizen B_{11}, B_{12} und B_{22} gilt.

Aufgabe 2. (i) Sei $q \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass ein $j_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $j \geq j_0$ die Ungleichung $q(1-q)^j \leq 1/(ej)$ gilt.
(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ und sei $0 < \omega \leq 1/\lambda_1$. Zeigen Sie, dass mit $M = (I_n - \omega A)$ die Abschätzung $\|AM^j\|_2 \leq \lambda_1/j$ für $j \geq j_0$ mit einem geeigneten $j_0 \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3. (i) Stellen Sie die Zahlen 142, 237 und 1111 für die Basen $b = 2, 4$ und 10 mit der Präzision $p = 10$ und den Exponentenschranken $e_{min} = -10$ sowie $e_{max} = 10$ als normalisierte Gleitkommazahlen dar.
(ii) Bestimmen Sie die 25. Nachkommastelle von $1/7$.
(iii) Wieso ist die Zahl $1/10$ im Binärsystem nur durch eine unendliche Reihe darstellbar?

Aufgabe 4. (i) Beweisen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ in Gleitkommaarithmetik konvergiert.
(ii) Zeigen Sie, dass die Gleitkommaaddition $+_G$ nicht assoziativ ist.

Anwesenheitsaufgabe:
Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Diskutieren Sie die Begründung.

Ist $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig und gilt $\|\phi(x)\| \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist ϕ gut konditioniert.	
Für $b = 10$, $p = 4$, $e_{min} = -3$, $e_{max} = 3$ ist $-13 \cdot 10^{-2}$ eine normalisierte Gleitkommazahl.	
Gilt $\mathrm{rd}(x) = 0$, so folgt $|x| < \mathrm{eps}$.	
Die Maschinengenauigkeit eps beschränkt den absoluten Fehler bei der Approximation reeller Zahlen durch Gleitkommazahlen.	
Ist ϕ schlecht konditioniert, so ist jedes numerische Verfahren $\widetilde{\phi}$ stabil.	

Homepage: `https://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/ls/lsbartels/lehre/Num2`