Numerik (Teil 2)

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Mittwoch, den 22. Juni 2016, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. (i) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\imath \ell k 2\pi/n} = n$ gilt, falls n Teiler von ℓ ist, und $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\imath \ell k 2\pi/n} = 0$ andernfalls gilt.
(ii) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $(\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}) \subset \mathbb{C}^n$ definiert durch $\omega^k = [\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \dots, \omega_n^{(n-1)k}]^\top$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, mit der n-ten Einheitswurzel $\omega_n = e^{\imath 2\pi/n}$ die Eigenschaft $\omega^k \cdot \omega^\ell = n\delta_{k\ell}$ besitzt.

Aufgabe 2. (i) Es seien $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie, dass ein eindeutig bestimmtes Polynom $p(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_{n-1} z^{n-1}$ mit komplexen Koeffizienten β_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, existiert, so dass $p(z_j) = y_j$ für $j = 0, 1, \dots, n-1$ gilt.
(ii) Folgern Sie die eindeutige Lösbarkeit der komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe.

Aufgabe 3. Berechnen Sie ohne Verwendung von Matrix-Vektor-Multiplikationen die Fourier-Synthese $y = T_8\beta$ des Vektors

$$\beta = [0, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}]^\top.$$

Aufgabe 4. Die Quadraturformel $Q : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad $2q$ und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,\dots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a + b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass Q exakt vom Grad $2q + 1$ ist.

Homepage: `https://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/ls/lsbartels/lehre/Num2`