

Numerik (Teil 2)

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels

Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 6

Anwesenheitsaufgaben: Dieses Blatt wird nicht bewertet und muss nicht abgegeben werden.

Aufgabe 1. Sei $b \in \mathbb{R}^n$, sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und sei $\phi(x) = (A^{-1}(b - Ax)) \cdot (b - Ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für eine Approximation $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ wird beim Abstiegsverfahren die Suchrichtung $\tilde{d} = -\nabla\phi(\tilde{x})$ verwendet.

(i) Zeigen Sie, dass $\tilde{d} = b - A\tilde{x}$ gilt und bestimmen Sie die Minimalstelle $\tilde{\alpha}$ der Funktion $t \mapsto \phi(\tilde{x} + t\tilde{d})$.

(ii) Zeigen Sie, dass mit dem optimalen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{x}^{neu} = \tilde{x} + \tilde{\alpha}\tilde{d}$ gilt

$$\|\tilde{x}^{neu} - x^*\|_A^2 = \|\tilde{x} - x^*\|_A^2 \left(1 - \frac{\|\tilde{d}\|^4}{(\tilde{d} \cdot A\tilde{d})(\tilde{d} \cdot A^{-1}\tilde{d})}\right).$$

(iii) Sei $\kappa = \text{cond}_2(A) = \lambda_{\min}^{-1} \lambda_{\max}$ die Konditionszahl von A . Verwenden Sie ohne Beweis die für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gültige Abschätzung

$$\frac{(x \cdot Ax)(x \cdot A^{-1}x)}{\|x\|^4} \leq \frac{(\lambda_{\min}^{-1} + \lambda_{\max})^2}{4\lambda_{\min}\lambda_{\max}},$$

um zu beweisen, dass

$$\|\tilde{x}^{neu} - x^*\|_A \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right) \|\tilde{x} - x^*\|_A.$$

Quiz.

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und eine beliebige Operatornorm $\ \cdot\ $ gilt $\ \lambda A + \mu B\ \leq \lambda\ A\ + \mu\ B\ $.	
Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lässt sich die Inverse A^{-1} einer LU -zerlegbaren Matrix A mit dem Aufwand $\mathcal{O}(n^4)$ bestimmen.	
Für symmetrische Matrizen stimmen Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren überein.	
Jede Spline-Funktion ist einmal stetig differenzierbar.	
Die Berechnung eines kubischen Splines führt auf ein lineares Gleichungssystem mit diagonaldominanter, irreduzibler Systemmatrix.	
Die Lagrange-Polynome erfüllen die Identität $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$ für alle $x \in [a, b]$.	
Als komplexer Vektorraum hat $\mathbb{C}^n$ die Dimension n und als reeller Vektorraum die Dimension $2n$.	
Die komplexe trigonometrische Interpolationsaufgabe wird durch $\beta = T_n y$ mit der Fourier-Matrix T_n gelöst.	
Die Trapezformel auf dem Intervall $[-1, 1]$ approximiert das Integral der Funktion f durch $[f(-1) + f(1)]/2$.	