Z' AUSSAGEN DER LINEAREN ALGEBRA

S. BARTELS, 30.4.2014

I.A. **Skalarprodukt von Vektoren.** Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ wird durch die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w = v^\top w = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

eine bilineare Abbildung definiert, die als Skalarprodukt bezeichnet wird. Die Euklidische Länge eines Vektors ist damit gegeben durch

$$\|v\|_2 = (v \cdot v)^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^n v_i^2 \Big)^{1/2}.$$

Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ spannen eine Ebene auf und mit dem Winkel α zwischen diesen Vektoren innerhalb der Ebene gilt

$$v \cdot w = \cos(\alpha) \|v\|_2 \|w\|_2.$$

I.B. **Determinante quadratischer Matrizen.** Im Fall $n = 2$ wird ein orientierter Flächeninhalt des von zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms definiert durch

$$\det[v, w] = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Allgemeiner ist das orientierte Volumen eines von Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelepipeds durch die Determinante $\det V$ der Matrix V, deren Spalten die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind, gegeben. Das Vorzeichen der Determinante definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen des $\mathbb{R}^n$ und erlaubt so die Definition einer positiven und negativen Orientierung. Der Wert einer Determinante lässt sich rekursiv mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz berechnen, der besagt, dass

$$\det V = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det \widehat{V}_{ij}$$

gilt, wobei $\widehat{V}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ aus V durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht und für jede reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ die Identität $\det s = s$ gilt. Für Dreiecksmatrizen $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, das heißt es gilt $r_{ij} = 0$ für alle $i > j$ oder für alle $i < j$, ist $\det R = r_{11} r_{22} \ldots r_{nn}$.

I.C. **Bild und Kern linearer Abbildungen.** Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beziehungsweise die damit identifizierte lineare Abbildung sind ihr Bild und Kern definiert durch

$$\operatorname{Im} A = \{w \in \mathbb{R}^m : \exists v \in \mathbb{R}^n,\, w = Av\},$$
$$\ker A = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}.$$

Damit gelten die Identitäten

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{Im} A + \ker A^\top, \quad \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A^\top + \ker A,$$

wobei die Zerlegungen sogar orthogonal sind, das heißt für $w = Av \in \operatorname{Im} A$ und $u \in \ker A^\top$ gilt

$$w \cdot u = w^\top u = (Av)^\top u = \big(v^\top A^\top\big)u = v^\top\big(A^\top u\big) = 0.$$

Damit ist $\operatorname{Im} A$ das orthogonale Komplement von $\ker A^\top$, das heißt $\operatorname{Im} A = (\ker A^\top)^\perp$. Der Rang einer Matrix A ist die Dimension des Bildes der induzierten linearen Abbildung, das heißt

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A.$$

Der Rang einer Matrix entspricht der Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren. Durch Elementarumformungen erhält man, dass der Rang einer Matrix mit dem Rang der Transponierten Matrix übereinstimmt. Aus der Orthogonalität der obigen Zerlegungen ergeben sich damit die Formeln

$$m = \operatorname{rank} A + \dim\ker A^\top, \quad n = \operatorname{rank} A + \dim \ker A,$$

insbesondere gilt $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^\top$. Für einen Endomorphismus beziehungsweise eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ folgt, dass er genau dann bijektiv ist, wenn er surjektiv, das heißt $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^n$, oder injektiv, das heißt $\ker A = \{0\}$, ist. In diesem Fall ist A regulär beziehungsweise invertierbar und es gilt $\det A \neq 0$.

I.D. **Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit.** Charakteristische Informationen über eine Matrix A und die zugehörige lineare Abbildung sind in den Eigenwerten enthalten, die die Nullstellen des charakteristischen Polynoms n-ten Grades

$$p_A(t) = \det(A - tI_n)$$

sind. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn ein zugehöriger Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$ existiert. Die Menge der Eigenwerte wird auch als Spektrum bezeichnet. Jede Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt n Eigenwerte, die durch die Diagonaleinträge von R gegeben sind. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn eine invertierbare Matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existieren, so dass $V^{-1}AV = D$ gilt. In diesem Fall haben A und D dieselben Eigenwerte und sind durch die Diagonaleinträge von D gegeben. Ferner sind dann die Spaltenvektoren von V zugehörige Eigenvektoren, denn es gilt

$$[Av_1, \dots, Av_n] = A[v_1, \dots, v_n] = AV = VD = [v_1, \dots, v_n]D = [\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n].$$

Damit folgt, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn es eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von A gibt. Ein Beispiel für eine nicht diagonalisierbare Matrix ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

denn das charakteristische Polynom von A besitzt nur die Nullstelle $\lambda = 0$ und wäre A diagonalisierbar, so gäbe es eine invertierbare Matrix $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $V^{-1}AV = 0$, was $A = 0$ zur Folge hätte. Symmetrische Matrizen sind stets diagonalisierbar und es existiert eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren, das heißt es existieren linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ mit $\|v_j\|_2 = 1$ sowie $v_j \cdot v_k = 0$ für $1 \leq j, k \leq n$ mit $j \neq k$.

I.E. **Jordansche Normalform.** Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt stets n komplexe Nullstellen, allerdings ist auch die durch A definierte Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $z \mapsto Az$, im Allgemeinen nicht diagonalisierbar. Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist jedoch komplex trigonalisierbar, das heißt es existieren eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sowie eine obere Dreiecksmatrix $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$, deren Diagonaleinträge die komplexen Eigenwerte von A sind, so dass $A = T^{-1}JT$ gilt. Die Existenz der Jordanschen Normalform besagt, dass J so gewählt werden kann, dass

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

mit Blockmatrizen $J_i \in \mathbb{R}^{s_i\times s_i}$, $i = 1, 2, \dots, r$, den sogenannten Jordan-Kästchen, die mit Eigenwerten λ_{ℓ_i}, $i = 1, 2, \dots, r$, durch

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_{\ell_i} & 1 & & \\ & \lambda_{\ell_i} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_{\ell_i} \end{bmatrix}$$

gegeben sind, gilt. Dabei tritt jeder Eigenwert λ entsprechend seiner geometrischen Vielfachheit, das heißt der Dimension von $\ker(A - \lambda I_n)$, in mehreren Jordan-Kästchen auf. Die Summe der Größen der Jordan-Kästchen eines Eigenwerts λ entspricht seiner algebraischen Vielfachheit, das heißt die Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms $p_A(t)$.