Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön, M.Sc. Marijo Milicevic

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei V der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die folgenden Familien von Funktionen auf lineare Abhängigkeit in V:

(a) $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = \ln(x)$

(b) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \sin(x/2)\cos(x/2)$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Sei V ein Vektorraum und sei $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{w} \in V$ eindeutige Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ existieren, so dass $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$.

(b) Sei $\mathbf{w} \in V$ mit $\mathbf{w} \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, so dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ eine Basis von V ist.

(c) Seien $X, Y \subset V$ Untervektorräume mit Basen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ beziehungsweise $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ und sei $\dim(X \cap Y) = 1$. Zeigen Sie, dass nach Entfernung eines geeigneten Basisvektors, die Vereinigung der beiden Basen eine Basis von $X + Y$ ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen Folgen a_n mit $\sum_n^\infty a_{n=1}^2 < \infty$ mit den Operationen

- Vektoraddition: $(a_n, b_n) \mapsto a_n + b_n$
- Skalarmultiplikation: $(\lambda, a_n) \mapsto \lambda a_n$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

einen reellen Vektorraum bildet.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

(a) Sei $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben durch die Spaltenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, d.h

$$M = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n} & \cdots & v_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\text{Bild}(M) = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie eine Basis vom Kern und Bild der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie jeweils den Rang der Matrizen an.

Abgabe: Montag 2.05.2016 vor der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den Namen des Tutors und die Nummer der Übungsgruppe auf die Lösung.