

Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön, M.Sc. Marijo Milicevic

Präsenzaufgaben

Definition

Eine *Basis* eines Untervektorraums U ist eine minimale Menge $\mathcal{A} \subset U$, so dass $U = \text{Span}(\mathcal{A})$ gilt. Die *Dimension* eines Untervektorraums ist die Kardinalität der Basis.

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume des \mathbb{R}^n sind. Geben Sie gegebenenfalls eine Basis und die Dimension des Untervektorraums an.

- (a) $M_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + \pi x_2 = 0\}$,
- (b) $M_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + \pi x_2 = 1\}$,
- (c) $M_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$,
- (d) $M_4 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = 0\}$,
- (e) $M_5 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} \cap \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$,

Aufgabe 2

(a) Berechnen Sie die Dimension des Unterraums $V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$, mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Ergänzen Sie $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis des \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 3

(a) Charakterisieren Sie alle 1-dimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^3 .

(b) Wann handelt es sich bei einer Ebene um einen Unterraum des \mathbb{R}^3 ? Sind durch

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot n = 0\}$$

für $n \neq 0$ beliebig schon alle solchen Unterräume beschrieben? Welche geometrische Interpretation besitzt n ?

(c) Finden Sie zu $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektoren v und w , so dass mit U wie oben gilt

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \mu v + \nu w, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}.$$

Die obigen Aufgaben sind Präsenzaufgaben und werden in der ersten Übungsgruppe bearbeitet und besprochen. Das Aufgabenblatt bedarf keiner Abgabe.