Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön, M.Sc. Marijo Milicevic

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_n \in V$.

(a) Angenommen $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch jede Teilmenge von $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren enthält.

(b) Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass wenn v_1, v_2 und v_2, v_3 linear unabhängig sind, nicht notwendigerweise auch v_1 und v_3 linear unabhängig sind.

(c) Seien jeweils v_1, v_2 und v_2, v_3 und v_1, v_3 linear unabhängig. Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 nicht notwendigerweise linear unabhängig sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine *lineare* Abbildung, d.h. $F(\lambda x + \sigma y) = \lambda F(x) + \sigma F(y)$, für alle $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass durch

$$U_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ gegeben ist (siehe Definition 1.2).

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung gegeben ist. Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Unterraums $U_{\widetilde{F}}$ aus Aufgabenteil (a).

(c) Finden Sie für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ jeweils Beispiele für lineare Funktionen $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $\dim(U_{F_k}) = k$. Beschreiben Sie die Unterräume U_{F_k} geometrisch.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien W, U Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $W \cap U$ ist ein Untervektorraum von V.

(b) $W \cup U$ ist im Allgemeinen *kein* Untervektorraum von V. Geben Sie ein Beispiel an.

(c) Gilt $W \subset U$, so ist $W \cup U$ ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen reellen Vektorraum der Dimension 2 bildet und durch $\{1, i\}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Untervektorräume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}i = \{ix \mid x \in \mathbb{R}\}$ komplementäre Untervektorräume von $\mathbb{C}$ sind (siehe Definition 1.3).

Abgabe: Montag 25.04.2016 vor der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den Namen des Tutors und die Nummer der Übungsgruppe auf die Lösung.