Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön, M.Sc. Marijo Milicevic

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Für $k \in \{1, \ldots n\}$ sei die Matrix $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ diejenige Matrix, welche aus A durch Streichen der letzten $n-k$ Zeilen und Spalten entsteht. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Die Eigenwerte und die Diagonaleinträge von A sind strikt positiv.

(ii) Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Matrix A_k positiv definit.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Für $\alpha > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x - x_0|^\alpha$.

(a) Für welche $\alpha > 0$ sind die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ stetig in $x = x_0$?

(b) Berechnen Sie für $n = 3$, $\alpha = 1$ und $x_0 = [1, 2, 3]^T$ die Richtungsableitung von f im Punkt $x = [4, 6, 15]^T$ in Richtung $v = [2, -1, 2]^T$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Das Höhenprofil einer Gemeinde im Schwarzwald sei in km gegeben durch

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\left(10 + x_1 + x_2 + \sqrt{x_1 x_2 + 76}\right)$$

für $-7 \le x_1, x_2 \le 7$. Der Gemeinderat erwägt den Bau einer Bahntrasse entlang der Geraden

$$t \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Steigung (in %) der Trasse im Punkt $(4, 6)$.

(b) Ingenieure der örtlichen Eisenbahngesellschaft weisen darauf hin, dass die Bahntrasse nur genutzt werden kann, falls die Steigung in keinem Punkt mehr als 10 % beträgt. Wird die Bahntrasse gebaut?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine polynomielle Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$f(1, -1) = 13,\ \partial_1 f(1, 2) = 2,\ \partial_2 f(4, 1) = 6,\ \partial_\nu f(0, 0) = 8,\ \nabla f(0, 1) = [-1, 10]^T,$$

wobei $\nu = [2, 4]^T$.

(b) Konstruieren Sie eine nicht-konstante Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, die in $x_0 = (3, 2)$ ein lokales Maximum mit Wert 1 besitzt, welches kein isoliertes Maximum ist.

Abgabe: Montag 04.07.2016 vor der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den Namen des Tutors und die Nummer der Übungsgruppe auf die Lösung.