Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön, M.Sc. Marijo Milicevic

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Matrix-Vektor-Produkte $A\mathbf{x}$, $B\mathbf{y}$, $A^T\mathbf{x}$ und $B^T\mathbf{x}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie S_1A, S_2A, S_2^TA für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch die Spaltenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, die Gleichung $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist, wenn $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind.

(b) Sei $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Untersuchen Sie die lineare Abbildung $F_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$, auf Injektivität und Surjektivität, unter folgenden Voraussetzungen:

(i) Das Gleichungsystem $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist lösbar für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Zu gegebenem $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ existiert höchstens eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

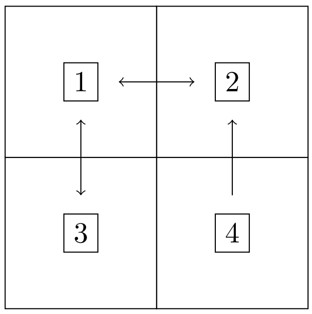
Aufgabe 3 (3 Punkte)

In dem abgebildeten Labyrinth mit den Räumen $1, 2, 3$ und 4 befinden sich Mäuse. Zwischen einigen Räumen gibt es Durchgänge. Der Durchgang zwischen Raum 4 und Raum 2 kann nur in Richtung von Raum 4 nach Raum 2 benutzt werden, nicht umgekehrt. Im Verlauf einer Versuchsreihe wurde die Anzahl der Mäuse in den Räumen jede Minute protokolliert. Es wurde festgestellt, dass die Hälfte der Mäuse eines Raumes im Raum verbleibt. Die anderen wandern, ohne einen Durchgang zu bevorzugen, einen Raum weiter.

(a) Stellen Sie eine Übergangsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ auf, so dass zu gegebener Verteilung $x \in \mathbb{R}^4$ die Verteilung in der nächsten Minute durch $Ax \in \mathbb{R}^4$ gegeben ist.

(b) Zu einem Zeitpunkt befinden sich 56 Mäuse in Raum 1, 44 Mäuse in Raum 2, 36 Mäuse in Raum 3 und 24 Mäuse in Raum 4. Wie verteilen sich die Mäuse nach zwei Minuten? Wie kann die Verteilung eine Minute vorher ausgesehen haben?

(c) Bestimmen Sie einen Gleichgewichtszustand, d.h. $\tilde{x}$ mit $A\tilde{x} = \tilde{x}$ im Labyrinth, wenn sich insgesamt 104 Mäuse darin befinden. Berechnen Sie eine Basis von $\ker(A - E_4)$, mit der Einheitsmatrix $E_4 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.



Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, d.h. eine Basis mit $||v_i||^2 = 1$ und $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gibt es also eine eindeutige Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, so dass $v = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$. Zeigen Sie, dass $\alpha_k = \langle \vec{v}, \vec{v_k} \rangle$ gilt.

Abgabe: Montag 9.5.2016 vor der Vorlesung.