Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön, M.Sc. Marijo Milicevic

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum, $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie: für die Matrix $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Einträgen $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ für $i, j = 1, \ldots, n$ und $x, y \in V$ mit $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ und $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ gilt

$$\langle x, y \rangle = x \cdot (Gy) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1n} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei P_3 der Vektorraum aller Polynome vom Grad $k \leq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$ eine Basis von P_3 gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass $F : P_3 \to P_3$, $q(x) \mapsto q(x) - (x-1)q'(x)$, eine lineare Abbildung ist. Berechnen Sie die darstellende Matrix $M_F \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinanten von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -8 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass A und A^{-1} nur aus ganzen Zahlen bestehen. Bestimmen Sie $\det(A)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{2 \times 2} \to \mathbb{R}$ nicht-linear und nicht-konvex ist.

(b) Für Zahlen $a, b > 0$ sei eine Ellipse E definiert durch

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}.$$

Definieren Sie eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass $T(B_1(0)) = E$ gilt, wobei $B_1(0)$ die Kreisscheibe mit Radius 1 im $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Geben Sie eine Formel für die Fläche von E an und überprüfen Sie diese an zwei geeigneten Beispielen.

Abgabe: Montag 06.06.2016 vor der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den Namen des Tutors und die Nummer der Übungsgruppe auf die Lösung.