Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön, M.Sc. Marijo Milicevic

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie: Die Matrizen A und A^T haben die gleichen Eigenwerte, zugehörige Eigenvektoren sind im Allgemeinen jedoch nicht gleich.

(b) Zeigen Sie: Die Eigenwerte von A sind durch die Diagonaleinträge $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ von A gegeben, falls A eine obere Dreiecksmatrix ($a_{ij} = 0$ für $i > j$) oder eine untere Dreiecksmatrix ($a_{ij} = 0$ für $i < j$) ist.

(c) Sind die Eigenwerte von A invariant unter elementaren Zeilenoperationen?

Aufgabe 2 (3 Punkte)
(a) Die Spur einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert durch $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie: Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

(b) Zeigen Sie, dass für zwei zueinander ähnliche Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B = S^{-1}AS$, die folgenden Aussagen gelten:

(i) A und B haben die gleiche Determinante und Spur.

(ii) A und B haben das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
In der Vorlesung wurde erklärt, dass es bei einer Folge von Drehungen des $\mathbb{R}^3$ zwei Punkte auf der Oberfläche einer Kugel um den Koordinatenursprung gibt, die sich vor und nach der Folge von Drehungen an derselben Stelle im umgebenden Raum befinden. Definieren Sie ein praktisches Verfahren zur Bestimmung der beiden Punkte beziehungsweise der invarianten Achse, die durch die beiden Punkte verläuft, indem Sie (vor Hintereinanderausführen der Drehungen) drei geeignete Markierungspunkte auf der Kugeloberfläche angeben und beschreiben, wie Sie bei der Bestimmung der invarianten Achse fortfahren.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
(a) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass für unendlich viele offene Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, die Menge $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ im Allgemeinen nicht offen ist. Zeigen Sie weiter, dass für unendlich viele abgeschlossene Mengen $B_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, die Menge $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ im Allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

(b) Es sei $D = \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$. Zeigen Sie, dass kein $\overline{x} = (x_1, x_2) \in D$ existiert mit $f(\overline{x}) \leq f(x)$ für alle $x \in D$.

Abgabe: Montag 20.06.2016 vor der Vorlesung.
Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den Namen des Tutors und die Nummer der Übungsgruppe auf die Lösung.