## Übungen zur Vorlesung Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Sommersemester 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels, Dipl.-Math. P. Schön, M.Sc. Marijo Milicevic

### Aufgabenblatt 9

**Aufgabe 1** (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, so gilt $\partial D \cap D = \emptyset$.

(b) Zeigen Sie: Für $D \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $\overline{D} = D \cup \partial D$ abgeschlossen.

**Aufgabe 2** (3 Punkte)

Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_1 = x_2 = 0, \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_1 = x_2 = 0, \\ \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, 0) = \lim\limits_{x_2 \to 0} f(0, x_2) = f(0)$ gilt und $f$ nicht stetig in $x = 0$ ist.

(b) Ist $g$ stetig in $x = 0$?

**Aufgabe 3** (3 Punkte)

Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x) = x_1 e^{x_1 x_3} + \sin(x_1 x_2), \qquad g(x) = \left[x_1 + 2x_2^3, x_1^2, e^{x_1 x_2}\right]^T.$$

(a) Berechnen Sie $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ und $\partial_3 f(x)$ und prüfen Sie nach, dass $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$ für $1 \leq i, j \leq 3$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Jacobimatrix $Dg(x)$ von $g$.

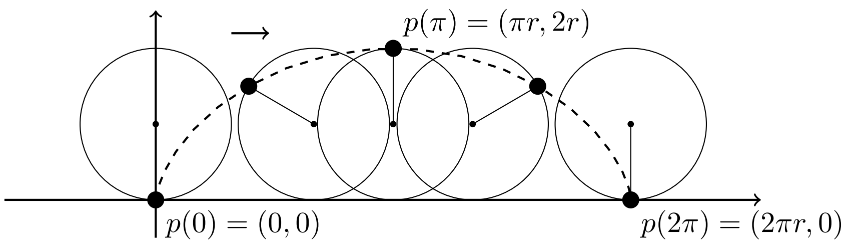
**Aufgabe 4** (3 Punkte)

Im $\mathbb{R}^2$ sei zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Kreis mit Radius $r > 0$ und Kreismittelpunkt $x_M = (0, r)$ gegeben. Betrachte den festen Punkt $p$, welcher zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der Kreislinie im Punkt $(0, 0)$ liegt. Der Kreis drehe sich nun in Richtung $[1, 0]^T$ so, dass sich zum Zeitpunkt $t = 2\pi$ der Kreismittelpunkt im Punkt $(2\pi r, r)$ befinde. Der Punkt $p$ befindet sich im Zeitpunkt $t = 2\pi$ im Punkt $(2\pi r, 0)$. Der Weg, den der Punkt $p$ im Zeitintervall $[0, 2\pi]$ durchlaufen hat, wird parametrisiert durch die Kurve $p : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$p(t) = r\left[t - \sin(t), 1 - \cos(t)\right]^T.$$

Berechnen Sie die Länge $L(p)$ der zurückgelegten Strecke.

Hinweis: Verwenden Sie die Identität $(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) = 4\sin^2(t/2)$.




---

**Abgabe: Montag 27.06.2016** vor der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den Namen des Tutors und die Nummer der Übungsgruppe auf die Lösung.