Mathematische Kontinuumsmechanik

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Informationen und aktuelle Hinweise zur Vorlesung finden Sie im Internet unter
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss17/mkm` .

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Eine Getränkedose wird einem auf 5.0 °C eingestellten Kühlschrank entnommen. Nachdem sie 30 Minuten bei einer Temperatur von 25.0 °C gelagert wird, beträgt die Temperatur der Flüssigkeit noch 7.0 °C. Wie lange darf die Getränkedose höchstens der höheren Temperatur ausgesetzt sein, damit die Flüssigkeit nicht wärmer als 15.0 °C wird? Modellieren Sie den Prozess und berechnen Sie eine Lösung. Bestimmen Sie die physikalischen Einheiten aller auftretenden Größen. Diskutieren Sie Einschränkungen des verwendeten Modells.

Aufgabe 2. (i) Die feste Verzinsung eines Guthabens y_0 zum Zinssatz $a > 0$ pro Zeiteinheit führt zum Zeitpunkt $t = k\Delta t$ auf den Betrag

$$y_k = (1 + a\Delta t)^k y_0.$$

Welcher Betrag ergibt sich höchstens zum Zeitpunkt $T = 1$, wenn die Zeiteinheiten beliebig klein gewählt werden dürfen, das heißt der Zinseszinseffekt optimal ausgenutzt werden kann?
(ii) Verwenden Sie den Differenzenquotienten $d_t y^k = (y^k - y^{k-1})/\Delta t$, um zu zeigen, dass obige Formel im Limes $\Delta t \to 0$ eine Differentialgleichung approximiert.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass die Menge der speziellen orthogonalen Matrizen

$$SO(3) = \{Q \in \mathbb{R}^{3\times 3} : Q^T Q = I,\ \det Q = 1\}$$

eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert.
(ii) Bestimmen Sie den Tangentialraum von $SO(3)$ in einem Punkt $Q \in SO(3)$, indem Sie zunächst den Fall $Q = I$ betrachten.

Aufgabe 4. Es sei $\Phi : (0,T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(t,x) = t^2 [x_1, 2x_2, 3x_3]^T.$$

(i) Zeigen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus ist, und bestimmen Sie $J(t,x) = \det D\Phi(t,x)$.
(ii) Seien $\Omega_0 = (0,1)^3$ und $\Omega_t = \Phi(t,\Omega_0)$ für $t > 0$. Sei ferner $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1,x_2,x_3) = (6x_1)^2 + (3x_2)^2 + (2x_3)^2.$$

Berechnen Sie

$$K(t) = \int_{\Omega_t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und bestimmen Sie $K'(t)$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10. Mai 2017, 10 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).