Mathematische Kontinuumsmechanik

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Informationen und aktuelle Hinweise zur Vorlesung finden Sie im Internet unter
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss17/mkm` .

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben und $\operatorname{Cof} A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch

$$(\operatorname{Cof} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det \widehat{A}_{ij},$$

wobei $\widehat{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entstehe.
(i) Zeigen Sie, dass mit der Matrix $E^{(ij)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die an der Position (i,j) den Eintrag 1 und sonst Nulleinträge hat, gilt

$$(\operatorname{Cof} A)_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{\det(A + hE^{(ij)}) - \det A}{h}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\operatorname{Cof} A = (\det A)A^{-T}.$$

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie durch Verwendung der binomischen Formel für $(a+b)^n$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 + x/n\big)^n = \exp(x).$$

(ii) Ein Anfangsguthaben g_0 werde pro Zeiteinheit $\Delta t > 0$ mit dem Satz $a > 0$ verzinst. Zeigen Sie, dass durch Ausnutzung des Zinseszinseffekts maximal das Guthaben $\exp(a\Delta t)$ nach einer Zeiteinheit erzielt werden kann.

Aufgabe 3. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sowie $q : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar.
(i) Zeigen Sie, dass $-\nabla f(x)$ die Richtung des steilsten Abstiegs von f bei $x \in \Omega$ angibt.
(ii) Erklären Sie unter Verwendung des Gaußschen Divergenzsatzes und physikalischer Einheiten, wieso $\operatorname{div} q(x) = \partial_1 q_1(x) + \dots + \partial_3 q_3(x)$ die Durchströmung eines infinitesimalen Volumens durch einen Massefluss q bei $x \in \Omega$ angibt.
(iii) Geben Sie zwei Beispiele für nichttriviale divergenzfreie Vektorfelder an.

Aufgabe 4. Leiten Sie für die Wärmeleitung durch einen dünnen, isolierten Draht eine eindimensionale Gleichung her. Verwenden Sie dabei das Fouriersche Gesetz, dass der Wärmefluss proportional zum negativen Temperaturgradienten ist, entdimensionalisieren Sie die Gleichung und führen Sie eine Dimensionsreduktion durch. Betrachten Sie dabei:
(i) einen geraden Draht, der das Gebiet $\Omega_\delta = (0,L) \times B_\delta(0)$ mit $0 < \delta \ll L$ einnimmt;
(ii)* einen gebogenen Draht mit Durchmesser $0 < 2\delta \ll L$, dessen Mittellinie durch die bogenlängenparametrisierte Kurve $\phi : (0,L) \to \mathbb{R}^3$ gegeben ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 24. Mai 2017, 10 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

* = freiwillige Bearbeitung