Mathematische Kontinuumsmechanik

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Informationen und aktuelle Hinweise zur Vorlesung finden Sie im Internet unter
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss17/mkm` .

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Die Rotation eines Vektorfeldes $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\operatorname{rot} v = \begin{bmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{bmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass für $\phi \in C^2(\Omega)$ und $v \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\operatorname{rot} \nabla\phi = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0.$$

(ii) Sei $\Phi : (0, T) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(t, x) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot} \partial_t \Phi(t, x) = 2\omega \cos(\omega t) e_3$ gilt.
(iii) Erklären Sie unter Berücksichtigung von (i) und (ii), dass $\operatorname{rot} v$ die Rotationsgeschwindigkeit und -achse einer Bewegung angibt.

Aufgabe 2. Für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ sei $\operatorname{Cof} A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ definiert durch $(\operatorname{Cof} A)_{ij} = \det \widehat{A}_{ij}$, wobei $\widehat{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(d-1)\times(d-1)}$ die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A hervorgehende Matrix sei. Zeigen Sie, dass für $d \in \{2, 3\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $v \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{Cof} Dv = 0.$$

Aufgabe 3. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $\phi \in C^2(\Omega)$ sowie $u, v \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\phi u) &= \nabla\phi \cdot u + \phi \operatorname{div} u, \\
\operatorname{rot}(\phi u) &= \nabla\phi \times u + \phi \operatorname{rot} u, \\
\operatorname{rot} \operatorname{rot} u &= -\Delta u + \nabla \operatorname{div} u, \\
\operatorname{div}(u \times v) &= v \cdot \operatorname{rot} u - u \cdot \operatorname{rot} v, \\
\operatorname{rot}(u \times v) &= u \operatorname{div} v - v \operatorname{div} u + (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. (i) Zeigen Sie, dass die Modellierung der Ausbreitung von Kohlendioxid, das aus einem Schornstein austritt und einem konstanten Windfeld $w : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ausgesetzt ist, in Lagrange-Darstellung auf eine Gleichung der Form

$$\partial_t c - \kappa\Delta c + w \cdot \nabla c = f$$

in dem Zeit-Raum-Zylinder $(0, T) \times \Omega$ führt, indem Sie sich an der Herleitung der Diffusionsgleichung orientieren. Diskutieren Sie sinnvolle Rand- und Anfangsbedingungen.
(iii) Vergleichen Sie das Modell mit dem in Euler-Darstellung aus der Vorlesung.

Abgabe: Bis Samstag, den 03. Juni 2017, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).