Mathematische Kontinuumsmechanik

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Der Gesamtdrehimpuls der durch die Deformationen $\phi_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T]$, beschriebenen Bewegung eines Körpers Ω bezüglich eines Referenzpunktes $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$L(t) = \int_{\Omega(t)} (x - \overline{x}) \times \varrho(x) V_E(t,x) \, \mathrm{d}x,$$

wobei $V_E = \partial_t \phi_t \circ \phi_t^{-1}$ das Geschwindigkeitsfeld in Euler-Darstellung sei.
(i) Zeigen Sie, dass für die Rotation mit Winkelgeschwindigkeit ω eines Rads beziehungsweise Zylinders mit Gesamtmasse m, Radius r und Achse $e \in \mathbb{R}^3$ bezüglich seines Mittelpunkts gilt

$$L_R(t) \approx m_R r_R^2 \omega_R e_R, \quad L_Z(t) = \frac{1}{2} m_Z r_Z^2 \omega_Z e_Z.$$

(ii) Zur Beschreibung des Drehstuhlexperiments wird die Person zusammen mit dem Stuhl durch einen Zylinder mit $m_Z = 100\,\mathrm{kg}$ sowie $r_Z = 0.4\,\mathrm{m}$ und das Rad durch $m_R = 1\,\mathrm{kg}$ sowie $r_Z = 0.4\,\mathrm{m}$ beschrieben. Zur Vereinfachung werden der Mittelpunkt des Rads und des Zylinders als übereinstimmend angenommen. Bestimmen Sie aus der Erhaltung des Gesamtimpulses $L(t) = L_Z(t) + L_R(t)$ die Zylinderbewegung bei Veränderung der Rotationsachse des Rads.

Aufgabe 2. Für einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ mit $|n|^2 = 1$ und $n_i > 0$, $i = 1,2,3$, sei

$$V = \mathrm{conv}\{0, \alpha e_1, \beta e_2, \gamma e_3\} \subset [0,1]^3$$

ein Tetraeder, für den die dem Nullpunkt gegenüberliegende Seite S die Normale n habe.
(i) Zeigen Sie, dass für die Flächeninhalte der Seiten $S_j = \{x \in V : x_j = 0\}$ gilt $|S_j| = |S| n_j$.
(ii) Sei $f : V \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass ein Punkt $y \in V$ existiert mit

$$\int_V f(x) \, \mathrm{d}x = |V| f(y).$$

Aufgabe 3. Wir definieren die Exponentialfunktion auf dem Raum der Matrizen in $\mathbb{R}^{d \times d}$ durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\exp : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d \times d}$ wohldefiniert und differenzierbar ist.
(ii) Zeigen Sie, dass für schiefsymmetrische Matrizen $S \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt $\exp(S) \in SO(d)$.

Aufgabe 4. Die Mercatorsche Zylinderprojektion ist eine Abbildung der Sphäre $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ auf den Zylinder $Z = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |(x_1, x_2)| = 1\}$, die für $x \in S_2 \setminus \{\pm e_3\}$ dadurch definiert ist, dass der Schnittpunkt eines Liniensegments durch den Nullpunkt und x mit dem Zylinder Z gebildet wird. Dies entspricht dem Aufstellen einer Kerze am Mittelpunkt eines Globus und der optischen Projektion des Globus auf einen darum aufgestellten Zylinder.
(i) Konstruieren Sie die Umkehrabbildung $\phi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to S_2 \setminus \{\pm e_3\}$ der Zylinderprojektion.
(ii) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix der Abbildung und erklären Sie, warum die Abbildung ϕ winkel- aber nicht längentreu ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21. Juni 2017, 10 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).