Mathematische Kontinuumsmechanik

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 5

Zur Bearbeitung ausreichend sind 4 von 5 Aufgaben.

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass Zahlen $\varepsilon_{ijk} \in \{-1, 0, 1\}$, $1 \leq i, j, k \leq 3$, existieren, sodass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(a \wedge b) \cdot c = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} c_i a_j b_k.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für $1 \leq i \leq 3$ gilt

$$\operatorname{div}\big((x \wedge v)_i v\big) = \Big(x \wedge \sum_{\ell=1}^{3} \partial_\ell (v_\ell v)\Big)_i.$$

Aufgabe 2. (i) Leiten Sie das zweite Keplersche Gesetz, welches besagt, dass der Abstandsvektor $x(t)$ eines Planeten zur Sonne in einer festen Zeitspanne Δt stets dieselbe Fläche $A_{\Delta t}$ überstreicht, aus dem Prinzip der Drehimpulserhaltung her. Zeigen Sie dazu zunächst, dass $A_{\Delta t}$ gegeben ist durch

$$A_{\Delta t}(t) = \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} |x(s) \wedge x'(s)| \, \mathrm{d}s$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Laufbahn des Planeten gegeben ist durch die Gleichung

$$m_P x''(t) = -G m_P m_S x(t)/|x(t)|^3$$

und verifizieren Sie die Impuls- und Energieerhaltungsprinzipien.

Aufgabe 3. Die Existenz von Lösungen mathematischer Modelle zur Beschreibung von Strömungsvorgängen wird häufig auf Fixpunktargumente zurückgeführt. Beispielsweise besagt der Brouwersche Fixpunktsatz, dass jede stetige Abbildung $f : K_1(0) \to K_1(0)$ der abgeschlossenen Einheitskugel $K_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ in sich selbst einen Fixpunkt besitzt. Folgern Sie, dass jede stetige Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $F(x) \cdot x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \geq R$ für ein $R \geq 0$ eine Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $|x^*| \leq R$ besitzt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass keine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $v : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit Randwerten $v(-1) = -1$ und $v(1) = 1$ existiert, die das Funktional

$$I(v) = \int_{(-1,1)} \big(x v'(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x$$

in dieser Funktionenmenge minimiert.

Aufgabe 5. Recherchieren Sie die Begriffe nicht-Newtonscher und Newtonscher Flüssigkeiten und stellen Sie deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede auf einer Seite dar.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 5. Juli 2017, 10 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).