Mathematische Kontinuumsmechanik

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (i) Führen Sie eine Entdimensionalisierung der Navier–Stokes-Gleichungen für die Beschreibung inkompressibler, isothermer, viskoser Flüssigkeiten mit den charakteristischen Größen ℓ für den Durchmesser des Gebiets und V für das Geschwindigkeitsfeld durch.
(ii) Bestimmen Sie die Reynolds-Zahlen $\mathrm{Re} = (\rho V \ell)/\mu$ für ein Kolibakterium und für Michael Phelps in Wasser. In was für einer Flüssigkeit müsste Phelps schwimmen, um ähnliche Strömungseigenschaften wahrzunehmen wie das Bakterium?
(iii) Diskutieren Sie mögliche Schwierigkeiten bei der Untersuchung von Strömungseigenschaften eines Flugzeugs mittels eines Modells im Windkanal.

Beispielvideo zum Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung
https://av.tib.eu/media/11056

Aufgabe 2. Leiten Sie die Impulserhaltungsgleichung in Lagrange-Koordinaten her.

Aufgabe 3. Die Existenz von Lösungen für mathematische Modelle der Verformung von Festkörpern wird häufig mit Hilfe geeigneter Minimierungsprobleme nachgewiesen.
(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine unterhalb-stetige, koerzive und nach unten beschränkte Funktion, das heißt es gilt

$$f(x) \leq \lim_{x_j \to x} f(x_j), \quad |x_j| \to \infty \implies f(x_j) \to \infty, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) > -\infty.$$

Zeigen Sie, dass f eine Minimalstelle besitzt.
(ii) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem reflexiven Banachraum X. Wie können obige Bedingungen verallgemeinert werden, um die Existenz einer Minimalstelle in X nachzuweisen?

Hinweis: Orientieren Sie sich am Satz von Eberlein-Smuljan.

Aufgabe 4. (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv. Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann ein Minimum des Minimierungsproblems

$$\text{Minimiere} \quad x \mapsto \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \quad \text{unter der Bedingung } Bx = 0$$

ist, wenn ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^m$ existiert, so dass folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} Ax + B^T \lambda &= b, \\ Bx \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für jede Minimalstelle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $b - Ax \in (\operatorname{Ker} B)^\perp$.
(ii) Identifizieren Sie formal den Druck im Stokesschen System für inkompressible, viskose, isotherme, stationäre Strömungen als Lagrange-Multiplikator der Inkompressibilitätsnebenbedingung.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19. Juli 2017, 10 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).