

SKRIPT ZUR VORLESUNG

Mathematische Kontinuumsmechanik

Mitschrift von
Steve Wolff-Vorbeck

Vorlesung von
Prof. Dr. Sören Bartels

Sommersemester 2017

Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Mathematische Modellierung | 3 |
| 1.1 | Konzepte | 3 |
| 1.2 | Diskrete und kontinuierliche Modelle | 3 |
| 1.3 | Entdimensionalisierung | 5 |
| 1.4 | Asymptotische Entwicklung | 6 |
| 1.5 | Dimensionsreduktion | 8 |
| 1.6 | Wohlgestelltheit | 9 |
| 2 | Kinematik | 11 |
| 2.1 | Deformationen | 11 |
| 2.2 | Euler-Lagrangekoordinaten | 11 |
| 2.3 | Das Reynoldssche Transport-Theorem | 13 |
| 2.4 | Starrkörperbewegungen | 16 |
| 2.5 | Koordinatentransformationen | 17 |
| 2.6 | Beobachterunabhängigkeit | 19 |
| 3 | Gleichgewichte und Erhaltungsgleichungen | 21 |
| 3.1 | Teilchensysteme | 21 |
| 3.2 | Übergang zum Kontinuum | 23 |
| 3.3 | Kontinuierliche Erhaltungssätze | 25 |
| 3.4 | Der Spannungstensor | 26 |
| 3.5 | Energieerhaltung | 28 |
| 3.6 | Zusammenfassung und erste Anwendungen | 29 |
| 4 | Gase und Flüssigkeiten (Fluide) | 31 |
| 4.1 | Modellannahmen | 31 |
| 4.2 | Eulergleichungen | 31 |
| 4.3 | Navier-Stokes-Gleichungen | 32 |
| 4.4 | Spezielle Lösungen und Turbulenzen | 33 |
| 4.5 | Charakterisierung des Spannungstensors | 35 |
| 5 | Elastische Festkörper | 39 |
| 5.1 | Lagrange-Darstellung und Verzerrungstensor | 39 |
| 5.2 | Hyperelastizität | 40 |
| 5.3 | Isotropie | 42 |

| | | |
|----------|---------------------------------|-----------|
| 6 | Wellenphänomene | 43 |
| 6.1 | Elektrische Felder | 43 |
| 6.2 | Das Ohmsche-Gesetz | 44 |
| 6.3 | Magnetische Induktion | 45 |
| 6.4 | Die Lorentz-Kraft | 46 |
| 6.5 | Maxwell-Gleichungen | 47 |
| 7 | Quellen | 49 |

Kapitel 1

Mathematische Modellierung

1.1 Konzepte

Das Ziel ist die Beschreibung realer Vorgänge durch mathematische Gleichungen z.B. die Preise von Waren, das Bevölkerungswachstums eines Landes oder etwa die Verformung von Festkörpern.

- Modelle können quantitativ, d.h. zur Berechnung konkreter Werte oder qualitativ, d.h. zur Vorhersage von Entwicklungen, sein.
- wichtig ist die Beschränkung auf relevante, dominierende Effekte. So ist die Temperaturabhängigkeit eines Modells in vielen Fällen vernachlässigbar.
- Modelle sollten wohlgestellt sein, d.h. es existiert eine eindeutige Lösung des Problems und das Problem ist numerisch lösbar.
- Modellvereinfachungen wie die Beschreibung dünner Platten durch zweidimensionale Modelle sind oft hilfreich. Durch Skalierung lassen sich dominierende Terme identifizieren.

1.2 Diskrete und kontinuierliche Modelle

Diskrete Modelle beschränken Vorgänge durch endliche Größen.

Beispiel 1.2.1.

- (i) Das Guthaben eines Kontos sei im Zeitraum Δt zum Satz $a > 0$ verzinst. Nach k Zeitschritten wird aus dem Anfangsguthaben y_0 das Guthaben y_k :

$$y_k = (1 + a\Delta t)^k y_0.$$

Das Guthaben lässt sich damit berechnen. Allerdings lässt sich der Vorgang im Hinblick auf Monotonie nur schwierig analysieren.

- (ii) Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die zeitliche Temperaturveränderung eines einfachen Körpers (z.B. Metallkugel im Kühlschranks) proportional zur Differenz mit der Umgebungstemperatur, das bedeutet

$$\theta'(t) = -c \cdot (\theta(t) - \theta_U).$$

Wobei θ_U die Umgebungstemperatur sei. Die Lösung der Gleichung ist gegeben durch

$$\theta(t) = \theta_U + (\theta_0 - \theta_U)e^{-ct}.$$

Das bedeutet der Abfall der Temperatur ist exponentiell. Die Zeit kann in natürlicher Weise als kontinuierliche Variable aufgefasst werden, damit ist gemeint, dass das Zeitintervall als lückenlos zusammenhängend bzw. mathematisch präziser als zusammenhängende Menge mit gleicher Mächtigkeit, wie \mathbb{R} aufgefasst wird.

Räumliche kontinuierliche Beschreibungen bedürfen einer geeigneten Interpretation. Wir betrachten dazu die Diffusion einer Substanz z.B. Tinte in einem unbewegten Medium z.B. Wasser.

Wir betrachten ein d -dimensionales Gitter mit Gitterweite $\Delta x > 0$ und Knoten $x_j = j \cdot \Delta x$, $j \in \mathbb{Z}^d$. Es bezeichne U_j^k die Anzahl der Partikel der diffundierenden Substanz im Würfel $Q_j = x_j + \Delta x \cdot [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ zum Zeitpunkt $t_k = k\Delta t$. Es bezeichne p die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Partikel im Zeitraum Δt von einem Würfel in einen Nachbarwürfel springt. Damit folgt

$$U_j^{k+1} = U_j^k - p2^d U_j^k + \sum_{j, Q_i \text{ Nachbarwürfel}} p U_i^k.$$

Der Faktor p ist proportional zur Schnittfläche, proportional zu Δt , invers proportional zum Volumen* sowie invers proportional zum Abstand der Mittelpunkte der Würfel. Wir erhalten

$$p = c \cdot \frac{\Delta t \cdot \Delta x^{d-1}}{\Delta x^d \Delta x} = c \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Damit erhalten wir ($d = 2$)

$$U_j^{k+1} = (1 - 4c \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) U_j^k + c \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (U_{j1}^k + U_{j2}^k + U_{j3}^k + U_{j4}^k).$$

Diese Formel ist allerdings nur sinnvoll, wenn $c \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4}$ gilt, also die sogenannte CFL-Bedingung erfüllt ist.

Wir nehmen jetzt an, dass sich jedem Punkt $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Konzentration zuordnen lässt. Beispielsweise gelte

$$u(t, x) = \frac{\text{Anzahl der Partikel in } B_\epsilon(x)}{|B_\epsilon(x)|}$$

mit $0 < \epsilon \ll 1$. Weiter sei $u(t, x) \in \mathbb{R}^d$ eine Funktion, die das Fließverhalten der Substanz beschreibt, das bedeutet die Anzahl der Partikel, die pro Flächeneinheit und Zeiteinheit in Richtung q fließen. Für die Veränderung der Anzahl der Partikel in einem Kontrollvolumen $\omega \subset \Omega$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} u(t, x) dx = - \int_{\partial\omega} q \cdot \nu do(x),$$

mit der äußeren Einheitsnormalen ν . Wir verwenden das Diffusionsgesetz, das besagt, dass der Fluß q proportional zum negativen Konzentrationsgradienten ist

$$q = -\alpha \nabla u.$$

Das bedeutet, die Partikel bewegen sich aus Regionen hoher Konzentration in solche mit geringer Konzentration. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega} u(t, x) dx &= - \int_{\partial\omega} q(t, x) \cdot \nu d\sigma(x) \\ &= - \int_{\omega} \operatorname{div}(q(t, x)) dx = \alpha \int_{\omega} \operatorname{div}(\nabla u(t, x)) dx \end{aligned}$$

und somit

$$\int_{\omega} \partial_t u(t, x) dx = \alpha \int_{\omega} \Delta u(t, x) dx,$$

also

$$\int_{\omega} (\partial_t u - \alpha \Delta u) dx = 0.$$

Ist $\partial_t u - \alpha \Delta u$ stetig, so folgt aus der Beliebigkeit von ω , dass $\partial_t u - \alpha \Delta u = 0$ gelten muss. Dies wird als Diffusionsgleichung bezeichnet. In einer Dimension gilt $\partial_t u = \alpha \partial_x^2 u$.

Bemerkung 1.2.2. *Das diskrete Modell der Diffusionsgleichung lässt sich als mikroskopische und das kontinuierliche als makroskopische Beschreibung interpretieren.*

1.3 Entdimensionalisierung

Häufig sind einzelne Terme in Modellen vernachlässigbar. Um dies zu entscheiden werden alle Variablen durch Produkte aus charakteristischen Faktoren und dimensionslosen Variablen ersetzt. Ist beispielsweise $t \in [0, T]$ so setzen wir $t = \hat{t}T$, so dass $\hat{t} \in [0, 1]$ und dieses Intervall keine kinetischen oder extremen Größen enthält. Analog setzen wir

$$y(t) = \bar{Y} \hat{y}(\hat{t}) \Rightarrow \hat{y}(\hat{t}) = \frac{1}{\bar{Y}} y(\hat{t}T).$$

Für die Ableitung erhalten wir den Zusammenhang

$$\hat{y}'(\hat{t}) = \frac{T}{\bar{Y}} y'(\hat{t}T) = \frac{T}{\bar{Y}} y'(t)$$

Erfüllt nun $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung $y'(t) = ay(t)$, $y(0) = y_0$, so erfüllt \hat{y} die Gleichung

$$\frac{\bar{Y}}{T} \hat{y}'(\hat{t}) = y'(t) = ay(t) = a\bar{Y} \hat{y}(\hat{t})$$

bzw.

$$\hat{y}'(\hat{t}) = \frac{T}{\bar{Y}} a\bar{Y} \hat{y}(\hat{t}) = \hat{a} \hat{y}(\hat{t})$$

mit dem dimensionslosen Wachstumsfaktor \hat{a} . Es zeigt sich also, dass der Faktor \hat{a} die entscheidende Größe ist. Die charakteristische Größe \bar{Y} taucht aufgrund der Linearität nicht im entdimensionalisierten Modell auf.

Als zweites Beispiel betrachten wir den zur Erdoberfläche senkrechten Wurf. Auf das geworfene Objekt der Masse m , das sich zum Zeitpunkt t , in Sekunden, in der Höhe $y(t)$ in Metern Höhe befinde, wirken Gravitationskräfte gemäß

$$F = -G \frac{m \cdot m_E}{(y(t) + r_E)^2},$$

wobei die Erde als Punktmasse beschrieben wird, mit Masse m_E und Radius r_E . Nach dem zweiten Newtonschen-Gesetz verursacht die wirkende Kraft eine Beschleunigung gemäß

$$F = ma = m \cdot y''(t).$$

Damit erhalten wir

$$y''(t) = -G \frac{m_E}{(y(t) + r_E)^2}.$$

Wir ersetzen $t = \hat{t}T$, $y(t) = \bar{Y}\hat{y}(\hat{t})$ und erhalten mit $y''(t) = \frac{\bar{Y}}{T^2} \cdot \hat{y}''(\frac{t}{T}) = \frac{\bar{Y}}{T^2} \hat{y}''(\hat{t})$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{y}''(\hat{t}) &= -G \cdot \frac{m_E}{r_E^2} \cdot \frac{T^2}{\bar{Y}} \cdot \frac{r_E^2}{(\bar{Y}\hat{y}(\hat{t}) + r_E)^2} \\ &= -G \cdot \frac{m_E}{r_E^2} \cdot \frac{T^2}{\bar{Y}} \cdot \frac{1}{(\frac{\bar{Y}}{r_E}\hat{y}(\hat{t}) + 1)^2} \\ &= -g \cdot \frac{T^2}{\bar{Y}} \cdot \frac{1}{(\beta\hat{y}(\hat{t}) + 1)^2} \end{aligned}$$

mit $g = G \cdot \frac{m_E}{r_E^2} \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$.

Mit den dimensionslosen Faktoren $\alpha = g \cdot \frac{T^2}{\bar{Y}}$ und $\beta = \frac{\bar{Y}}{r_E}$ erhalten wir dann die entdimensionalisierte Gleichung

$$\hat{y}'' = -\alpha \frac{1}{(\beta\hat{y} + 1)^2}.$$

Für einen einfachen Wurf sind $g = 10m/s^2$, $T = 1s$ sinnvolle Werte, die auf $\alpha = \frac{9.81}{10} \approx 1$, $\beta = \frac{10}{10^7} = 10^{-6}$ führen. Mit $\beta = \epsilon$ folgt $\hat{y}'' = -\alpha \frac{1}{(\epsilon\hat{y}+1)^2}$ wobei $\epsilon \ll 1$ sei. Im Vergleich zu 1 ist nun $\epsilon\hat{y}$ vernachlässigbar, was die Vereinfachung $\hat{y}'' = -\alpha$ rechtfertigt. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\hat{y}(\hat{t}) = \hat{v}_0\hat{t} - \frac{\alpha}{2}\hat{t}^2. \quad (1.1)$$

1.4 Asymptotische Entwicklung

Häufig ist die Vernachlässigung eines Terms eine zu starke Vereinfachung. Eine asymptotische Untersuchung kann zu einer genaueren Beschreibung des physikalischen Verhaltens führen. Wir fassen dazu die Lösung eines entdimensionalisierten Problems als Funktion in \hat{t} und ϵ auf und verwenden eine Taylorentwicklung um $\epsilon = 0$. Wir schreiben im Folgenden y statt \hat{y} und berechnen

$$y_\epsilon(t) = y(t, \epsilon) = y(t, 0) + \epsilon \partial_\epsilon y(t, 0) + \frac{\epsilon^2}{2} \partial_\epsilon^2 y(t, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Zur Vereinfachung schreiben wir

$$y_\epsilon(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Wir wollen nun diese Entwicklung in die Gleichung für den entdimensionalisierten Wurf einsetzen. Dazu verwenden wir zusätzlich eine Taylorentwicklung der Funktion $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ im Punkt $z = 0$, d.h

$$f(z) = 1 - 2z + 3z^2 + \mathcal{O}(z^3).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y_0'' + \epsilon y_1'' + \epsilon^2 y_2'' + \mathcal{O}(\epsilon^3) &= y'' = -\alpha f(\epsilon y) \\ &= -\alpha(1 - 2\epsilon y + 3\epsilon^2 y^2) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= -\alpha(1 - 2\epsilon y_0 - 2\epsilon^2 y_1 - 2\epsilon^3 y_2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) + 3\epsilon^2(y_0 + \epsilon y_1 + \dots)^2) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= -\alpha(1 - 2\epsilon y_0 - 2\epsilon^2 y_1 + 3\epsilon^2 y_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)). \end{aligned}$$

Nun sortieren wir die Gleichung nach Potenzen von ϵ um und erhalten

$$\epsilon^0(y_0'' + \alpha) + \epsilon(y_1'' - 2\alpha y_0) + \epsilon^2(y_2'' - 2\alpha y_1 + 3\alpha y_0^2) + \mathcal{O}(\epsilon^3) = 0.$$

Wir betrachten nun die linke Seite als Polynom in $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Damit nun Gleichheit gilt müssen alle Koeffizienten verschwinden und das bedeutet

$$\begin{aligned} y_0'' &= -\alpha \\ y_1'' &= 2\alpha y_0 \\ y_2'' &= -3\alpha y_0 + 2\alpha y_1 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 0, \quad y_0'(0) = v_0 \\ y_1(0) &= 0, \quad y_1'(0) = 0 \\ y_2(0) &= 0, \quad y_2'(0) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen lassen sich schrittweise lösen

$$y_0(t) = v_0 t - \frac{\alpha}{2} t^2$$

anschließend

$$y_1''(t) = 2\alpha y_0 = 2\alpha v_0 t - \alpha^2 t^2 \Rightarrow y_1(t) = \frac{2\alpha v_0}{6} t^3 - \frac{\alpha^2}{12} t^4,$$

und auf gleiche Weise schließlich

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}\alpha v_0 t^3 + \frac{1}{8}\alpha^2 t^4 + \frac{1}{30}\alpha^2 v_0 t^5 - \frac{1}{180}\alpha^3 t^6.$$

Mit dem berechneten kann man die Approximation y_0 , die dem Fall $\epsilon = 0$ entspricht, durch y_1 und y_2 im Fall $\epsilon > 0$ korrigieren.

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Asymptotische Entwicklung führt also auf eine flacheren Parabel, was man sich physikalisch dadurch erklärt, dass die Gravitationskraft mit zunehmender Höhe schwächer wird.

1.5 Dimensionsreduktion

Wir betrachten einen Diffusions- bzw. Wärmeleitungsprozess in einer Platte Ω_δ (z.B. ein Backblech) mit $\Omega_\delta = \omega \times (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten also die Gleichung

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = f \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_\delta,$$

mit Anfangsbedingung $u(0, \cdot) = u_0$. Ferner sind an jedem Punkt $x \in \partial\Omega_\delta$ Randdaten vorgegeben, d.h. es wird die Teilchenkonzentration bzw. die Temperatur vorgeschrieben.

$$u(t, x) = u_D(t, x), \quad \Gamma_D \subset \partial\Omega_\delta.$$

Wir erhalten somit Dirichlet-Randdaten. Andererseits können wir auch den Massefluss bzw. Wärmefluss an den Rändern vorgeben und erhalten auf diese Weise Neumann-Randdaten.

$$-q(t, x) \cdot \nu(x) = g(t, x), \quad x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega_\delta$$

bzw.

$$-\kappa \nabla u(t, x) \cdot \nu(x) = g(t, x).$$

mit der äußeren Normalen $\nu(x)$. An isolierten Teilen des Randes gelten Neumann-Randbedingungen (N) mit $g = 0$. Für eine Entdimensionalisierung nehmen wir an, dass $\text{diam}(\omega) = L$ ist mit $0 < \delta \ll L$ und betrachten

$$\hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \hat{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad \hat{x}_3 = \frac{x_3}{\delta}.$$

Das Gebiet Ω_δ wird dadurch auf das Gebiet

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{L} \cdot \omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

transformiert. Mit

$$\bar{U} \hat{u}(\hat{t}, \hat{x}) = u(t, x) = u(T\hat{t}, L\hat{x}_1, L\hat{x}_2, \delta\hat{x}_3)$$

ergeben sich die Ableitungen

$$\hat{\partial}_t \hat{u} = \frac{T}{\bar{U}} \partial_t u, \quad \hat{\partial}_1 \hat{u} = \frac{L}{\bar{U}} \partial_1 u, \quad \hat{\partial}_2 \hat{u} = \frac{L}{\bar{U}} \partial_2 u, \quad \hat{\partial}_3 \hat{u} = \frac{\delta}{\bar{U}} \partial_3 u.$$

Für die zweiten Ableitungen ergibt sich

$$\hat{\partial}_1^2 \hat{u} = \frac{L^2}{\bar{U}} \partial_1^2 u, \quad \hat{\partial}_2^2 \hat{u} = \frac{L^2}{\bar{U}} \partial_2^2 u, \quad \hat{\partial}_3^2 \hat{u} = \frac{\delta^2}{\bar{U}} \partial_3^2 u.$$

Damit erhalten wir für unsere Gleichung

$$\frac{\bar{U}}{T} \hat{\partial}_t \hat{u} - \kappa \frac{\bar{U}}{L^2} (\hat{\partial}_1^2 \hat{u} + \hat{\partial}_2^2 \hat{u} + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \hat{\partial}_3^2 \hat{u}) = F \hat{f}$$

bzw.

$$\hat{\partial}_t \hat{u} - \kappa \frac{T}{L^2} (\hat{\partial}_1^2 \hat{u} + \hat{\partial}_2^2 \hat{u}) - \kappa \frac{T}{L^2} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \hat{\partial}_3^2 \hat{u} = \frac{FT}{\bar{U}} \hat{f}.$$

Mit dem dimensionslosen Faktor $\kappa \frac{T}{L^2}$ und mit $\epsilon = \frac{\delta}{L}$ sowie $\hat{\kappa} = \kappa \frac{T}{L^2}$ und $c_f = \frac{FT}{U}$ ergibt sich

$$\hat{\partial}_t \hat{u} - \hat{\kappa} \hat{\Delta}_2 \hat{u} - \hat{\kappa} \epsilon^{-2} \hat{\partial}_3^2 \hat{u} = c_f \hat{f}.$$

Trennen nach ϵ -Termen führt uns auf

$$-\hat{\kappa} \hat{\partial}_3^2 \hat{u} = 0 \quad (1)$$

$$\hat{\partial}_t \hat{u} - \hat{\kappa} \hat{\Delta}_2 \hat{u} = c_f \hat{f}. \quad (2)$$

Die erste Gleichung impliziert, dass \hat{u} linear in vertikaler Richtung ist. Im Fall von isolierten Randbedingungen an der oberen und unteren Seite, das bedeutet $\partial_3 u = 0$ bei $x_3 = \pm \frac{\delta}{2}$ bzw. $\hat{\partial}_3 \hat{u} = 0$ bei $\hat{x}_3 = \pm \frac{1}{2}$. In diesem Fall ist die Funktion \hat{u} konstant in \hat{x}_3 -Richtung und durch ihren Wert auf der Mittelfläche $\hat{\omega}$ bestimmt, welcher sich aus (2) ergibt.

Im Fall von Dirichlet-Randbedingungen an der oberen und unteren Fläche ist die Temperatur in $\hat{\Omega}$ bzw. Ω_δ bereits vollständig bestimmt durch Gleichung (1).

1.6 Wohlgestelltheit

Unter der Wohlgestelltheit eines mathematischen Problems versteht man die eindeutige Lösbarkeit sowie die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten, d.h. kleine Störungen verursachen nur kleine Änderungen. Die Abhängigkeit ist häufig Konsequenz anderer Eigenschaften wie Maximums- bzw. Energieerhaltungsprinzipien. Wichtig ist auch die qualitative Analyse eines Modells beispielsweise anhand folgender Fragestellungen:

- Langzeitverhalten für $t \rightarrow \infty$. (Dämpfung oder Energieerhaltung)
- Existenz periodischer Lösungen (z.B. Phasendiagramm).
- Angabe und Eigenschaften approximierter Lösungen (asymptotische Entwicklung).

Generell sollten Modelle einfach genug sein, um eine mathematische Lösungstheorie zu ermöglichen andererseits umfangreich genug, um die wesentlichen Eigenschaften des betrachteten Prozesses wiederzugeben.

Kapitel 2

Kinematik

2.1 Deformationen

Ein Kontinuum, d.h. ein Festkörper oder eine Flüssigkeit nehme zum Zeitpunkt $t = 0$ das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 3$) ein. Ein Partikel, das bei $t = 0$ die Position $x \in \Omega$ einnimmt, befinde sich bei $t \geq 0$ an der Position $\Phi_t(x) \in \mathbb{R}^3$. Wir nehmen Injektivität an, d.h. unterschiedliche Partikel werden auf unterschiedliche Positionen abgebildet. Damit ist $\Phi_t : \Omega \rightarrow \Omega_t = \Phi_t(\Omega)$ bijektiv. Φ_t sei zudem ein Diffeomorphismus, d.h. Φ_t und Φ_t^{-1} sind differenzierbar. Insbesondere gelte $\det D\Phi_t \neq 0$ und wir nehmen Orientierungstreue an, das bedeutet $\det D\Phi_t > 0$. Die Abbildung Φ_t heißt Deformation.

Beispiel 2.1.1. (i) *Starrkörperbewegungen sind Deformationen die Abstände erhalten, d.h.*

$$|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| = |x - y|$$

Wir werden zeigen, dass für solche Deformationen gilt $\Phi_t(x) = Q(t)x + b(t)$ mit $Q(t) \in \mathbb{SO}(3)$ und $b(t) \in \mathbb{R}^3$. Alle Starrkörperbewegungen sind also affin lineare Abbildungen mit $A \in \mathbb{SO}(3)$.

(ii) *Lineare Streckungen oder Stauchungen z.B. in x_1 -Richtung sind gegeben durch $\Phi_t(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$ mit $\lambda > 1$ (Streckung) oder $\lambda < 1$ (Stauchung).*

(iii) *Eine Scherung ist z.B. durch $\Phi_\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$ gegeben.*

(iv) *Die Bahnkurve eines Partikels, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Position $x \in \Omega$ befindet, ist gegeben durch die Abbildung $t \rightarrow \Phi_t(x)$ mit Geschwindigkeitsvektor $v(t, x) = \partial_t \Phi_t(x)$.*

Bemerkung 2.1.2. *Bahnkurven unterscheiden sich von Stromlinien, die eine Momentaufnahme des Vektorfeldes $x \rightarrow \Phi_s(x)$ zum festen Zeitpunkt s angeben. Stromlinien definiert man als Integralkurven von Φ_s d.h. als Lösungen der Differentialgleichungen $y'(t) = \Phi_s(y(t))$, $y(0) = x$.*

2.2 Euler-Lagrangekoordinaten

Das Partikel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Position $x \in \Omega$ und zum Zeitpunkt $t > 0$ am Ort $y \in \Omega_t$. Eine zeitabhängige, dem Partikel zugeordnete Größe $f(p, t)$, wie z.B. Temperatur

Geschwindigkeit oder Beschleunigung kann bzgl. x oder y angegeben werden., d.h. es ergeben sich zwei verschiedene Darstellungsmöglichkeiten.

- (1) Lagrange-Darstellung: $f_L(x, t) = \{ \text{Größe des Partikels, das sich zum Zeitpunkt } t = 0 \text{ bei } x \in \Omega \text{ befindet.} \}$
- (2) Euler-Darstellung: $f_E(y, t) = \{ \text{Größe des Partikels, das zum Zeitpunkt } t \text{ die Position } y \in \Omega_t \text{ einnimmt.} \}$

Das bedeutet bei der Euler Darstellung befinden wir uns an einem Ort $y \in \Omega_t$ und beobachten das sich zum Zeitpunkt t dort befindliche Partikel.

Bei der Lagrange-Darstellung folgen wir einem festen Partikel. Die Lagrange-Darstellung ist geeignet, wenn eine begrenzte Anzahl an Partikeln relevant ist, z.B. Verformung von Festkörpern.

Definition 2.2.1. Die Darstellung bzgl. der Referenzkonfiguration heißt Lagrange-Darstellung und bzgl. der Momentankonfiguration Euler-Darstellung.

Zwischen den beiden Darstellungen besteht der Zusammenhang $f_E(t, \Phi(t, x)) = f_L(t, x)$. Für die Ortsableitung folgt somit

$$\begin{aligned} \partial_i f_L(t, x) &= D f_E(t, \Phi(t, x)) D_i \Phi(t, x) \\ &\quad \text{bzw.} \\ \nabla f_L(t, x) &= D \Phi(t, x)^T \nabla f_E(t, x). \end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung ist die Transformation der Zeitableitung. Dazu der folgende Satz.

Satz 2.2.2. Mit $V(t, x) = \partial_t \Phi(t, x)$ definieren wir

$$\frac{D}{Dt} f_E(t, y) = \partial_t f_E(t, y) + V \cdot \nabla_y f_E(t, y),$$

wobei $V \cdot \nabla_y f_E(t, y) = V_1 \partial_{y_1} f_E(t, y) + \dots + V_n \partial_{y_n} f_E(t, y)$ ist. Es gilt dann

$$\partial_t f_L(t, x) = \frac{D}{Dt} f_E(t, \Phi(t, x)) \tag{2.1}$$

Beweis. Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \partial_t f_L(t, x) &= \partial_t f_E(t, \Phi(t, x)) = \partial_t f_E(t, \Phi(t, x)) + D_y f_E(t, \Phi(t, x)) \partial_t \Phi(t, x) \\ &= \partial_t f_E(t, \Phi(t, x)) + \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} f_E(t, \Phi(t, x)) \cdot V_i \\ &= \frac{D}{Dt} f_E(t, \Phi(t, x)). \end{aligned}$$

□

Die Größe $\frac{D}{Dt} f_E(t, \Phi(t, x))$ heißt materielle Ableitung.

Beispiel 2.2.3. Wir betrachten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und die Partikel in Ω bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit $c \in \mathbb{R}^d$ nach rechts, d.h.

$$\Phi(t, x) = x + tc.$$

Die Temperatur eines Partikels sei proportional zu seiner x_1 -Koordinate. Dann ergeben sich die beiden Darstellungen

$$\Theta_E(t, y) = ky_1$$

in der Euler-Darstellung. Und

$$\Theta_L(t, x) = k(x_1 + tc_1)$$

in der Lagrange-Darstellung. Es folgt dann für die Ableitungen

$$\partial_t \Theta_E = 0, \quad \partial_t \Theta_L = kc_1, \quad \frac{D}{Dt} \Theta_E = kc_1.$$

2.3 Das Reynoldsche Transport-Theorem

Zur Herleitung einer Diffusionsgleichung haben wir die Massebilanz für ein Kontrollvolumen $\omega \in \mathbb{R}^3$ betrachtet. Wenn das Medium beweglich ist, müssen wir einer festen Menge von Punkten folgen, d.h. wir müssen die Familie $\omega_t = \Phi_t(\omega)$ und Integrale der Form

$$\Phi(t) = \int_{\omega_t} c(t, y) dy = \int_{\omega} c(t, \Phi(t, x)) |det(\Phi(t, x))| dx$$

betrachten und ableiten. Dabei zeigt Aufgabe 1 von Blatt 2 dass

$$\partial_{ij} \det A = (Cof A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det \hat{A}_{ij}.$$

Die Ableitung in Richtung einer Matrix B ist damit gegeben durch

$$D \det(A) : B = (Cof A) : B$$

mit dem Skalarprodukt für Matrizen $X : Y = \sum_{i,j} X_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(YX^T)$. Ist weiter A regulär, so gilt

$$Cof(A) = \det A \cdot A^{-T}$$

und damit

$$(D \det A) : B = \det A (A^{-T} : B) = \det A \cdot \text{tr}(BA^{-1}).$$

und folglich erhalten wir eine Darstellung für $\partial_t(\det D\Phi_t)$, was wir in folgendem Lemma festhalten wollen.

Lemma 2.3.1. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \partial_t \det D\Phi_t &= (D \det D\Phi_t) : \partial_t D\Phi_t \\ &= (D \det A) : B = \det D\Phi_t \text{tr}(\partial_t D\Phi_t (D\Phi_t)^{-1}) \\ &= \det D\Phi_t \text{tr}(\partial_t D\Phi_t (D\Phi_t)^{-1}) \end{aligned}$$

Wir sind nun in der Lage den wichtigen Satz von Reynolds zu beweisen.

Satz 2.3.2 (Reynolds'sches Transporttheorem). *Mit $\tilde{V}(t, y) = V(t, \Phi_t^{-1}(y))$ gilt*

$$I'(t) = \int_{\omega_t} \partial_t c(t, y) dy + \int_{\omega_t} \operatorname{div}(c(t, y) \cdot \tilde{V}(t, y)) dy \quad (2.2)$$

Beweis. Wir verwenden die Ketten-und-Produktregel sowie den Transformationsatz und erhalten damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= \int_{\omega} \partial_t c(t, \Phi(t, x)) + Dc(t, \Phi(t, x)) \partial_t \Phi_t(x) \det D\Phi_t(x) \\ &\quad + c(t, \Phi(t, x)) \partial_t \det D\Phi_t(x) dx \\ &= \int_{\omega} \partial_t c(t, \Phi(t, x)) + \nabla c(t, \Phi(t, x)) \tilde{V}(t, \Phi_t(x)) \det D\Phi_t(x) \\ &\quad + c(t, \Phi(t, x)) \det D\Phi_t(x) \operatorname{tr}(\partial_t D\Phi_t(x) (D\Phi_t(x))^{-1}) dx \end{aligned}$$

dabei wurde benutzt, dass $V(t, x) = \tilde{V}(t, \Phi(t, x))$ und

$$\begin{aligned} I &= D(\Phi_t^{-1} \circ \Phi_t) = (D\Phi_t^{-1} \circ \Phi_t) D\Phi_t \\ &\Leftrightarrow (D\Phi_t)^{-1} = D\Phi_t^{-1} \circ \Phi_t \end{aligned}$$

ist. Weiter gilt

$$\operatorname{div} \tilde{V} = \operatorname{div}(V \circ \Phi_t^{-1}) = \operatorname{tr}(D(V \circ \Phi_t^{-1})) = \operatorname{tr}[DV \circ \Phi_t^{-1} \cdot D\Phi_t^{-1}].$$

Damit erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= \int_{\omega} \partial_t c(t, \Phi(t, x)) \det D\Phi_t(x) dx \\ &+ \int_{\omega} [\nabla c(t, \Phi(t, x)) \cdot \tilde{V}(t, \Phi_t(x)) + c(t, \Phi_t(x)) \operatorname{div}(\tilde{V}(t, \Phi_t(x)))] \det D\Phi_t(x) dx \\ &= \int_{\omega_t} \partial_t c(t, y) dy + \int_{\omega_t} [\nabla c(t, y) \cdot \tilde{V}(t, y) + c(t, y) \operatorname{div} \tilde{V}(t, y)] dy \\ &= \int_{\omega_t} \partial_t c(t, y) dy + \int_{\omega_t} \operatorname{div}(c(t, y) \tilde{V}(t, y)) dy \end{aligned}$$

wobei hierbei die Substitution $y = \Phi_t(x)$ verwendet wurde. □

Dazu noch eine interessante Bemerkung.

Bemerkung 2.3.3. *Ist für jedes $\omega \in \Omega$ die Funktion $I(t)$ konstant, so gilt*

$$0 = \int_{\omega_t} \partial_t c + \operatorname{div}(c \tilde{V}) dy.$$

Aufgrund der Beliebigkeit des Gebietes $\omega \in \Omega$ bzw. $\omega_t \in \Omega_t$ folgt, dass der Integrand verschwinden muss, d.h. es gilt die Erhaltungsgleichung

$$0 = \partial_t c + \operatorname{div}(c\tilde{V}).$$

Im Fall von $c = 1$ ist $I(t) = |\omega_t|$ das Volumen von ω_t und $I'(t) = 0$, bedeutet, dass Volumina unter Transformation erhalten bleiben. Dies wird als Inkompressibilität bezeichnet. Inkompressibilität liegt also genau dann vor, wenn $\operatorname{div}\tilde{V} = 0$ gilt. Luft und Wasser sind in guter Näherung inkompressibel, Gummi hingegen nicht.

Wir betrachten die Luftbewegung, die durch die Abbildung $\Phi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ beschrieben wird, das bedeutet Φ_t gibt die Bewegung der Luftmoleküle an. Wir betrachten einen Schornstein, aus welchem Kohlendioxid austritt. Die Konzentration dieser Substanz bezeichnen wir mit $c(t, y)$ (Euler-Darstellung). Der Austritt aus dem Schornstein sei durch die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, welche nur in einer kleinen Umgebung um den Schornstein von Null verschieden ist. Wie im Fall der Diffusionsgleichung betrachten wir die Massebilanz für ein Kontrollvolumen ω und dessen zeitliche Entwicklung $(\omega_t)_{t \geq 0}$. Die Menge der Substanz in ω_t ist gegeben durch

$$I(t) = \int_{\omega_t} c(t, y) dy,$$

und nach dem Satz von Reynolds ist die Änderung gegeben durch

$$I'(t) = \int_{\omega_t} \partial_t c + \operatorname{div}(c \cdot \tilde{V}) dy.$$

Aufgrund von Diffusionsprozessen erhalten wir

$$\begin{aligned} I'(t) &= - \int_{\partial\omega_t} q \cdot \nu + \int_{\omega_t} f dy \\ &= - \int_{\omega_t} \operatorname{div} q dy + \int_{\omega_t} f dy \\ &= \kappa \int_{\omega_t} \operatorname{div}(\nabla c) dy + \int_{\omega_t} f dy \end{aligned}$$

und somit folgt

$$\int_{\omega_t} \partial_t c + \operatorname{div}(c\tilde{V}) - \kappa \Delta c dy = \int_{\omega_t} f dy$$

Aufgrund der Beliebigkeit von ω_t gilt dann also

$$\partial_t c + \operatorname{div}(c\tilde{V}) - \kappa \Delta c = f.$$

Da weiter gilt $\operatorname{div}(c\tilde{V}) = \nabla c \cdot \tilde{V} + \operatorname{div}\tilde{V} \cdot c$, folgt im Fall von $\operatorname{div}\tilde{V} = 0$, dass

$$\partial_t c + \tilde{V} \cdot \nabla c - \kappa \Delta c = f. \tag{2.3}$$

Hierbei bezeichnet $\partial_t c$ die Änderungsrate der Konzentration, $\tilde{V} \cdot \nabla c$ die Konvektion, $-\kappa \Delta c$ die Diffusion sowie f die Produktion. Gleichung (2.3) beschreibt die Konvektions-Diffusionsgleichung in Euler-Darstellung.

Bemerkung 2.3.4. *Inkompressibilität, d.h. $|\omega_t| = |\omega|$ in Lagrange-Darstellung, führt auf $\int_{\omega} 1 dx = |\omega| = |\omega_t| = \int_{\omega_t} 1 dx = \int_{\omega} \det D\Phi_t(x) dx$. Dies impliziert also $\det D\Phi_t = 1$, was im Gegensatz zu $\operatorname{div} \tilde{V} = 0$ eine nichtlineare Bedingung ist. Differenzieren bezüglich t führt auf*

$$D\Phi_t : D\partial_t \Phi_t = D\Phi_t : DV = 0.$$

Für kleine Bewegungen $\Phi_t(x) \approx x$ ist $D\Phi_t \approx I$ und es folgt die lineare Bedingung $\operatorname{div} V = 0$.

2.4 Starrkörperbewegungen

Als Starrkörperbewegung bezeichnet man Deformationen $\Phi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, für die Abstände erhalten bleiben, d.h.

$$|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| = |x - y|. \quad (2.4)$$

Wir werden zeigen, dass solche Bewegungen stets durch Rotationen und Translationen gegeben sind. Wir fixieren einen Zeitpunkt $t > 0$ und vernachlässigen dieses Argument. Da $\Phi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$, gilt für $x \in \Omega$ und $h \in \mathbb{R}^d$ hinreichend klein

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) + D\Phi(x)h + o(h).$$

Damit folgt aus (2.4) mit $y = x+h$

$$|D\Phi(x)h + o(h)|^2 = |h|^2$$

bzw.

$$|D\Phi(x)h|^2 + |o(h^2)| = |h|^2.$$

Für $h \rightarrow 0$ erhalten wir $|D\Phi(x)h|^2 = |h|^2$ bzw.

$$h^T D\Phi(x)^T D\Phi(x) h = (D\Phi(x)h)^T D\Phi(x) h = h^T I h$$

Dies impliziert dann

$$D\Phi(x)^T D\Phi(x) = I_d.$$

Das bedeutet aber, die Matrix $D\Phi(x)$ ist orthogonal und es ist $\det D\Phi(x) = 1$ also $D\Phi(x) \in \mathbb{SO}(d)$. Wir zeigen nun, dass $D\Phi(x)$ konstant ist, also durch eine Rotationsmatrix gegeben ist. Dazu der nachfolgende Satz von Liouville.

Satz 2.4.1 (von Liouville). *Sei $\Phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $D\Phi(x) \in \mathbb{SO}(d)$ für alle $x \in \Omega$. Dann ist $D\Phi(x)$ konstant, es existiert also ein $b \in \mathbb{R}^d$ und $Q \in \mathbb{SO}(d)$, so dass*

$$\Phi(x) = Qx + b$$

Beweis. Da $\det D\Phi(x) = 1$ und $D\Phi(x)^{-1} = D\Phi(x)^T$ ist, gilt $\operatorname{Cof} D\Phi(x) = \det D\Phi(x) D\Phi(x)^{-T} = D\Phi(x)$. Damit folgt

$$\Delta \Phi(x) = [\Delta \Phi_1(x), \dots, \Delta \Phi_d(x)]^T = \operatorname{div} D\Phi(x) = \operatorname{div} \operatorname{Cof} D\Phi(x)$$

In einer Übungsaufgabe haben wir gezeigt, dass $\operatorname{div} \operatorname{Cof} D\Phi(x) = 0$. Also ist

$$\Delta \Phi(x) = 0.$$

Φ ist also harmonisch und damit gilt $\Phi \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Ganz allgemein gilt

$$\Delta(|D\Phi|^2) = 2D\Phi : D\Delta\Phi + 2|D^2\Phi|^2 \quad (2.5)$$

Da für jede Rotation $A \in \text{SO}(d)$ gilt

$$|A|^2 = A : A = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(I) = d$$

und da $\Delta\Phi = 0$ ist, erhalten wir

$$|D^2\Phi|^2 = 0.$$

Also ist $D\Phi$ konstant. Zum Nachweis von (2.5) verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention, nach welcher über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Es ist zum Beispiel

$$\Delta\Phi_k = \partial_i^2 \Phi_k$$

und

$$|D\Phi|^2 = (\partial_j^2 \Phi_k)^2.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\partial_i^2 (\partial_j \Phi_k)^2 = \partial_i (2\partial_j \Phi_k \partial_i \partial_j \Phi_k) = 2(\partial_i \partial_j \Phi_k)(\partial_i \partial_j \Phi_k) + 2\partial_j \Phi_k \partial_i^2 \partial_j \Phi_k = 2|D^2\Phi|^2 + 2D\Phi : D\Delta\Phi.$$

□

Bemerkung 2.4.2. Für die Aussage des Satzes von Liouville genügt es $\Phi \in C^1$ anzunehmen.

2.5 Koordinatentransformationen

Wir betrachten offene Mengen $U, V \in \mathbb{R}^d$ sowie Diffeomorphismen $\phi : U \rightarrow V$ und dazu skalare Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Vektorfeld $y : U \rightarrow \mathbb{R}^d$. Dazu betrachten wir weiter die skalare Funktion $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $\tilde{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^d$. Die Funktionen bzw. Vektorfelder sollen dieselben physikalischen Größen in unterschiedlichen Koordinaten darstellen, z.B. bezüglich zweier Beobachter.

Beispiel 2.5.1. Punkte in U seien Punkte in einer Landkarte und $\phi : U \rightarrow V$ assoziieren reale Koordinaten bzgl. einer Person, die sich an der Position $x_0 \in V$ befindet und nach Osten schaut. Das bedeutet es gilt

$$\phi(x) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x - \bar{x}) + x_0.$$

Dabei gibt die Matrix eine Drehung um 90° , α den Maßstab und x_0 die Verschiebung an. Ist nun zum Beispiel die Temperatur bei x gegeben durch $\theta(x)$, so können wir sie mit der Funktion $\tilde{\theta} = \theta \circ \phi$ in die Karte eintragen. Bei der Windrichtung g , z.B. Südosten, ist es wenig sinnvoll, die Größe $g \circ \phi$ in die Karte einzuzeichnen. Der Vektor g muss um -90° gedreht werden, das bedeutet

$$\tilde{g}(x) = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (g \circ \phi)(x) = D\phi(x)^{-1} g \circ \phi$$

ist eine sinnvolle Größe.

Definition 2.5.2. Die Gramsche Matrix der Transformation ϕ ist definiert durch $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ mit

$$g_{ij}(x) = \partial_i \phi(\tilde{x}) \partial_j \phi(\tilde{x})$$

Bemerkung 2.5.3. (i) Es gilt $g(\tilde{x}) = D\phi(\tilde{x})^T D\phi(\tilde{x})$ und g ist symmetrisch mit $\det g > 0$

(ii) Für $y = D\phi\tilde{y}$ und $z = D\phi\tilde{z}$ ist $y \cdot z = (D\phi\tilde{y}) \cdot (D\phi\tilde{z}) = \tilde{y}^T D\phi^T D\phi\tilde{z} = \tilde{y}^T g\tilde{z} = (g\tilde{y}) \cdot \tilde{z}$.

Wichtig hierbei ist es das Verhalten des Nabla- sowie Laplace-Operators unter Koordinatentransformationen zu betrachten. Dazu der folgende Satz.

Satz 2.5.4. Sei $\tilde{f} = f \circ \phi$, $\tilde{y} = D\phi^{-1}y \circ \phi$, dann gilt

(i) $\nabla f \circ \phi = D\phi g^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{f}$

(ii) $(\operatorname{div} y) \circ \phi = |g|^{-\frac{1}{2}} \tilde{\operatorname{div}}(|g|^{\frac{1}{2}} \tilde{y})$

(iii) $(\Delta f) \circ \phi = \Delta_{\tilde{y}} \tilde{f} := |g|^{-\frac{1}{2}} \tilde{\operatorname{div}}(|g|^{\frac{1}{2}} g^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{f})$

mit $|g| = \det g$, $\tilde{\nabla} = [\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_d]$, $\tilde{\operatorname{div}} \tilde{y} = \tilde{\partial}_1 \tilde{y}_1 + \dots + \tilde{\partial}_d \tilde{y}_d$.

Beweis. (i) folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} D\tilde{f} &= (Df \circ \phi) D\phi \Rightarrow \nabla f \circ \phi = (Df \circ \phi)^T = (D\tilde{f} D\phi^{-1})^T \\ &= D\phi^{-T} D\tilde{f}^T = D\phi D\phi^{-1} D\phi^{-T} \nabla \tilde{f} = D\phi g^{-1} \nabla \tilde{f}. \end{aligned}$$

Zu (ii) sei $\tilde{\psi} \in C^1(\tilde{U})$ mit $\tilde{\psi}|_{\partial\tilde{U}} = 0$. Wir definieren dazu $\psi = \tilde{\psi} \circ \phi^{-1}$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{U}} \tilde{\psi} \operatorname{div}(y) \circ \phi |g|^{\frac{1}{2}} d\tilde{x} = \int_V \psi \operatorname{div}(y) dx = - \int_V \nabla \psi \cdot y dx \\ &= - \int_U \nabla \psi \circ \phi \cdot y \circ \phi |g|^{\frac{1}{2}} dx = - \int_U (D\phi g^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{\psi}) \cdot (D\phi \tilde{y}) \cdot |g|^{\frac{1}{2}} d\tilde{x} \\ &= - \int_U (g^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{\psi}) \cdot (D\phi^T D\phi \tilde{y}) |g|^{\frac{1}{2}} d\tilde{x} \\ &= - \int_U ((D\phi^T D\phi) g^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{\psi}) \cdot \tilde{y} |g|^{\frac{1}{2}} d\tilde{x} = - \int_U \tilde{\nabla} \tilde{\psi} \tilde{y} |g|^{\frac{1}{2}} d\tilde{x} \\ &= \int_U \tilde{\psi} \cdot \tilde{\operatorname{div}}(|g|^{\frac{1}{2}} \tilde{y}) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt dann

$$\tilde{\operatorname{div}}(|g|^{\frac{1}{2}} \tilde{y}) \cdot |g|^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{div}(y) \circ \phi.$$

(iii) folgt dann aus (i) und (ii), indem wir $y = \nabla f$, $\tilde{y} = D\phi^{-1} \nabla f \circ \phi = g^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{f}$ setzen. Es ist dann nämlich

$$\Delta f \circ \phi = (\operatorname{div} \nabla f) \circ \phi = |g|^{-\frac{1}{2}} \tilde{\operatorname{div}}(|g|^{\frac{1}{2}} g^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{f})$$

□

Es sei nun beispielsweise ϕ die Parametrisierung durch Polarkoordinaten

$$\phi(r, \theta) = r(\cos \theta, \sin \theta).$$

Das bedeutet nun $\tilde{x}_1 = r, \tilde{x}_2 = \theta$ und

$$g(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Gebiet $\tilde{V} = B_{r_2}(0) \setminus B_{r_1}(0)$. Für $f : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\tilde{f} = f \circ \phi$ gilt

$$\begin{pmatrix} \partial_r \tilde{f} \\ \partial_\theta \tilde{f} \end{pmatrix} = \tilde{\nabla} \tilde{f} = g \cdot D\phi^{-1} \nabla f$$

sowie mit $|g| = r^2$

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{y}} \tilde{f} &= \frac{1}{r} \operatorname{div} \left(r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} \cdot [\partial_r \tilde{f}, \partial_\theta \tilde{f}]^T \right) = \frac{1}{r} \operatorname{div} ([r \partial_r \tilde{f}, r^{-1} \partial_\theta \tilde{f}]^T) \\ &= \frac{1}{r} (\partial_r (r \partial_r \tilde{f}) + \partial_\theta (r^{-2} \partial_\theta \tilde{f})) = \partial_r^2 \tilde{f} + \frac{1}{r} \partial_r \tilde{f} + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \tilde{f}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.5.5. Zur Berechnung der Wassertemperatur in einem ringförmigen tiefen Schwimmbecken mit Randbedingungen, $T(r_1) = T_1, T(r_2) = T_2$, und der Annahme $\partial_\theta \tilde{T} = 0$ folgt, dass

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \tilde{T}) = 0 \Rightarrow r \partial_r \tilde{T} = c \Leftrightarrow \partial_r \tilde{T} = \frac{c}{r} \Rightarrow \tilde{T} = c_1 + c_2 \log(r).$$

Die Randbedingungen liefern c_1 und c_2 und wir erhalten $T(r) = (T_2 - T_1) \frac{\log(r) - \log(r_1)}{\log(r_2) - \log(r_1)} + T_1$.

Physikalisch lässt sich das dadurch begründen, dass der äußere Kreis aufgrund des größeren Umfangs den inneren Kreis dominiert.

2.6 Beobachterunabhängigkeit

Wir betrachten zwei orthogonale, positiv orientierte Koordinatensystem d.h. o.B.d.A

$$\tilde{x} = \phi(x) = Qx + b$$

mit $x \in \mathbb{R}^d$ und $Q \in \mathbb{SO}(d)$. Der zu einer Temperatur T gehörende Wärmefluss sei gegeben durch $q = \hat{q}(\nabla T)$. Bezüglich Koordinatentransformation gilt

$$\tilde{q} = Q^T q, \tilde{\nabla} \tilde{T} = Q^T \nabla T.$$

Wir nehmen an, dass $\tilde{q} = \hat{q}(\tilde{\nabla} \tilde{T})$. Daraus folgt

$$Q^T q = \hat{q}(Q^T \nabla T) \Leftrightarrow \hat{q}(\nabla T) = Q \hat{q}(Q^T \nabla T)$$

für alle $Q \in \mathbb{SO}(d)$. Die Abbildung \hat{q} muss also eine spezielle Struktur besitzen, um diese Identität zu erfüllen.

Satz 2.6.1. Für $\hat{q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gelte $\hat{q}(x) = Q\hat{q}(Q^T x)$ für alle $Q \in \mathbb{SO}(3)$ und alle $x \in \mathbb{R}^3$. Dann folgt

$$\hat{q}(x) = -\hat{\kappa}(|x|)x \quad (2.6)$$

Beweis. Zu $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sei $Q = Q_x$ die Drehung um die Achse x um den Winkel π . Das heißt x ist Eigenvektor von Q mit Eigenwert 1. Dann gilt $\hat{q}(x) = \hat{q}(Qx) = Q\hat{q}(x)$. Das bedeutet $\hat{q}(x)$ ist ebenfalls Eigenvektor von Q mit Eigenwert 1. Damit ist $\hat{q}(x)$ ein Vielfaches von x und somit

$$\hat{q}(x) = \alpha(x)x.$$

Ist nun $Q \in \mathbb{SO}(3)$ beliebig, so folgt $\alpha(x)Q^T x = Q^T \hat{q}(x) = \hat{q}(Q^T x) = \alpha(Q^T x)Q^T x$, und damit ist

$$\alpha(x) = \alpha(Q^T x)$$

für alle $Q \in \mathbb{SO}(3)$ bzw.

$$\alpha(x) = -\hat{\kappa}(|x|)$$

□

Wir haben also gezeigt, dass ein allgemeiner Zusammenhang zwischen $q = \hat{q}(\nabla T)$ nur dann vom Beobachter unabhängig ist, wenn \hat{q} die spezielle Struktur

$$\hat{q} = -\hat{\kappa}(|x|)x$$

besitzt. Dabei haben wir implizit vorausgesetzt, dass Isotropie gilt, d.h. das Verhalten in allen Richtungen ist dasselbe. Diese Annahme ist zum Beispiel bei Flüssigkeiten sinnvoll, nicht jedoch bei Materialien mit besonderer Struktur, wie zum Beispiel Holz. Die allgemeine Beziehung zwischen Fluss und Konzentrations- bzw. -Temperatur-Gradienten nennt man konstitutive Beziehung.

Kapitel 3

Gleichgewichte und Erhaltungsgleichungen

3.1 Teilchensysteme

Wir betrachten ein System von N Massepunkten. Die Positionen und die Massen dieser Punkte seien

$$x_i(t) \in \mathbb{R}^3, \quad m_i \in \mathbb{R}_{>0}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Zwischen den Partikeln wirken anziehende Kräfte. Auf die einzelnen Partikel wirken zudem äußere Kräfte wie zum Beispiel Gravitation. Es bezeichne dabei $f_{ij} \in \mathbb{R}^3$ diejenige Kraft, welche von Partikel j auf Partikel i ausgeübt wird. Weiter bezeichne k_i die äußere Kraft die auf Partikel i wirkt. Der Impuls eines Partikels ist dann definiert als

$$p_i = m_i \cdot v_i$$

mit $v_i = x_i'$. Nun gilt nach dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$p_i' = m_i \cdot v_i' = \sum_{j=1, j \neq i} f_{ij} + k_i$$

Nach dem 3. Newtonschen Gesetz ist $f_{ij} = -f_{ji}$. Wirken die Kräfte f_{ij} entlang des Differenzvektors $x_i - x_j$, so können wir sie darstellen als

$$f_{ij} = \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \phi_{ij}(|x_i - x_j|)$$

Die Funktion ϕ kann positiv (abstoßend) oder negativ (anziehend) sein. Für Gravitationskräfte ist

$$\phi_{ij}(r) = G \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{r^2}$$

Für den Gesamtimpuls $p = \sum_{i=1}^N p_i$ gilt

$$p' = \sum_{i=1}^N p_i' = \sum_i \left(\sum_{j, j \neq i} f_{ij} + k_i \right) = \sum_i k_i = k.$$

Das heißt also der Gesamtimpuls ist nur abhängig von äußeren Kräften. Definieren wir die Gesamtmasse als $m = \sum_i m_i$ und den Schwerpunkt durch $x = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i$, so erhalten wir

$$p = \sum_i p_i = \sum_i m_i x_i' = m \left(\frac{1}{m} \sum_i m_i x_i \right)' = m x'.$$

Das bedeutet wir erhalten

$$m x'' = k.$$

Zur vollständigen Beschreibung der Dynamik eines Systems wird zusätzlich der Drehimpuls benötigt. Bezüglich eines Referenzpunktes $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ ist dieser gegeben durch

$$L_i = (x_i - \bar{x}) \wedge p_i. \quad (3.1)$$

Die zugehörige äußere Kraft ist das Drehmoment

$$M_i = (x_i - \bar{x}) \wedge k_i \quad (3.2)$$

Damit folgt für die Änderung des Gesamtdrehimpulses $L = \sum_i L_i$, da $x_i' \parallel p_i$,

$$\begin{aligned} L' &= \left(\sum_i (x_i - \bar{x}) \wedge p_i \right)' = \sum_i (x_i - \bar{x}) \wedge p_i' \\ &= \sum_i \sum_{j, j \neq i} (x_i - \bar{x}) \wedge f_{ij} + \sum_i (x_i - \bar{x}) \wedge k_i \\ &= \sum_i \sum_{j, j \neq i} x_i \wedge \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \phi_{ij} (|x_i - x_j|) - \sum_i \sum_{j, j \neq i} \bar{x} \wedge f_{ij} + \sum_i M_i = M. \end{aligned}$$

Also ergibt sich $L' = M$. Hierbei wurde die Identität $x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_i$ benutzt, und dass $\phi_{ij} = \phi_{ji}$ gilt.

Die kinetische Energie des Systems ist dann

$$E_{\text{kin}} = \sum_i m_i \frac{|x_i'|^2}{2} \quad (3.3)$$

und die Gesamtarbeit der äußeren Kraft ist

$$W = \sum_i x_i' k_i. \quad (3.4)$$

Die Änderung der kinetischen Energie E_{kin} ist dann

$$\begin{aligned} E'_{\text{kin}} &= \sum_i m_i x_i' \cdot x_i'' = \sum_i x_i' p_i' \\ &= \sum_i x_i' \cdot \left(\sum_{j, j \neq i} f_{ij} + k_i \right) \\ &= \sum_i \sum_{j, j \neq i} x_i' \cdot f_{ij} + W. \end{aligned}$$

Für den ersten Term gilt

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_{j, i \neq j} x'_i \cdot f_{ij} &= \sum_i \sum_{j, i \neq j} x'_i \cdot \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \phi_{ij}(|x_i - x_j|) \\
&= \sum_i \sum_{j, j < i} \left(x'_i \cdot \frac{x_i - x_j}{|x_j - x_i|} - x'_j \cdot \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \right) \phi_{ij}(|x_i - x_j|) \\
&= \sum_i \sum_{j < i} (x_i - x_j)' \cdot \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \phi_{ij}(|x_i - x_j|) \\
&= \sum_i \sum_{j < i} \frac{d}{dt} (|x_i - x_j|) \cdot \phi_{ij}(|x_i - x_j|).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $\phi_{ij} = \phi_{ji}$ benutzt. Ist nun $\phi_{ij} = \phi$ für alle i, j und ist Φ Stammfunktion von ϕ , so folgt mit

$$\frac{d}{dt} \Phi(|u|) = \phi(|u|) \frac{u}{|u|} \cdot u'$$

dass

$$\sum_i \sum_{i \neq j} x'_i \cdot f_{ij} = \sum_i \sum_{j < i} \frac{d}{dt} \Phi(|x_i - x_j|)$$

Als Folge davon erhalten wir

$$\begin{aligned}
E'_{\text{kin}} &= W + \sum_i \sum_{j < i} \frac{d}{dt} \Phi(|x_i - x_j|) = W + \frac{d}{dt} \sum_i \sum_{j < i} \Phi(|x_i - x_j|) \\
&= W + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i \sum_{i \neq j} \Phi(|x_i - x_j|) = W - E'_{\text{pot}}
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}})' = W.$$

Das bedeutet, dass die Änderung der Gesamtenergie gerade der verrichteten Arbeit entspricht.

3.2 Übergang zum Kontinuum

Der Übergang von diskreten Teilchensystemen zur kontinuierlichen Beschreibung erfolgt durch Bildung geeigneter Mittelwerte auf einer Längenskala $h > 0$. Genauer verwenden wir Würfel der Seiten- oder Kantenlänge h um Punkte x , das heißt

$$Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y - x|_\infty < \frac{h}{2}\}$$

und definieren die kontinuierliche Massendichte eines Punktesystems durch

$$\rho_h(t, x) = \frac{1}{h^3} \sum_{x_i(t) \in Q_h(x)} m_i.$$

Wir nehmen an, dass die Skala h sinnvoll gewählt werden kann, so dass einerseits ρ_h nicht zu stark variiert (h zu klein) und andererseits die Verteilung der Punkte aber gut erfasst. Wir definieren nun die gewichtete Impulsdichte

$$p_h(t, x) = \frac{1}{h^3} \sum_{x_i(t) \in Q_h(x)} m_i x'_i(t)$$

sowie die mittlere Geschwindigkeit durch

$$v_h(t, x) = \frac{p_h(t, x)}{\rho_h(t, x)}$$

Weiter definieren wir die Dichte der kinetischen Energie durch

$$E_{\text{kin},h}(t, x) = \frac{1}{h^3} \sum_{x_i(t) \in Q_h(x)} m_i \frac{|x'_i(t)|^2}{2}$$

sowie die Dichte der potentiellen Energie durch

$$E_{\text{pot},h}(t, x) = -\frac{1}{2h^3} \sum_{x_i(t) \in Q_h(x)} \sum_{i \neq j} \Phi_{ij}(|x_i - x_j|)$$

und schließlich die Gesamtenergiedichte als

$$E_h = E_{\text{kin},h} + E_{\text{pot},h}.$$

Wir hätten die gemittelte kinetische Energiedichte auch durch

$$E_{\text{kin},h}^{\text{makro}} = \rho_h \frac{|v_h|^2}{2}$$

definieren können, was auf eine andere, als makroskopische Energiedichte bezeichnete, Form führt. Es gilt dann

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},h}(t, x) - E_{\text{kin},h}^{\text{makro}}(t, x) &= \frac{1}{h^3} \sum_{x_i \in Q_h(x)} m_i \frac{|x'_i|^2}{2} - \rho_h \frac{|v_h|^2}{2} \\ &= \frac{1}{h^3} \sum_{x_i(t) \in Q_h(x)} m_i \frac{|x'_i - v_h(t, x)|^2}{2} + v_h(t, x) \cdot \frac{1}{h^3} \sum_i m_i x'_i(t) - \frac{1}{h^3} \sum_i m_i \frac{|v_h|^2}{2} - \frac{1}{2} \rho_h |v_h|^2 \\ &= \frac{1}{h^3} \sum_{x_i \in Q_h(x)} m_i \frac{|x'_i - v_h|^2}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$E_{\text{kin},h}(t, x) = \frac{1}{2} \rho_h |v_h|^2 + E_{\text{kin},h}^{\text{mikro}}(t, x) = E_{\text{kin},h}^{\text{mikro}}(t, x) + E_{\text{kin},h}^{\text{makro}}(t, x).$$

Die Größe $E_{\text{kin},h}^{\text{mikro}}(t, x)$ beschreibt Fluktuationen um die makroskopische Geschwindigkeit v_h und lässt sich als Wärmeenergie interpretieren. Mit der inneren Energie pro Masseneinheit u_h , welche durch

$$\rho_h u_h = E_{\text{kin},h}^{\text{mikro}} + E_{\text{pot},h} \tag{3.5}$$

definiert ist, beschreiben wir die mikroskopische und potentielle Energie und erhalten damit die Gesamtenergiedichte

$$E_h = E_{\text{kin},h} + E_{\text{pot},h} = \rho_h \left(\frac{|v_h|^2}{2} + u_h \right).$$

3.3 Kontinuierliche Erhaltungssätze

Wir betrachten nun Familien von Funktionen $\phi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, t \in [0, T]$, und zugehörige deformierte Gebiete $\Omega(t) = \phi_t(\Omega)$. Es bezeichne im Folgenden v das Geschwindigkeitsfeld in Euler-Koordinaten, d.h.

$$v(t, x) = \partial_t \phi_t(\phi_t^{-1}(x)).$$

Für ein Kontrollvolumen $\omega \in \Omega$ sind die darin enthaltenen Punktmassen genau diejenigen Punktmassen, die zum Zeitpunkt $t > 0$ in $\omega(t) = \phi_t(\omega)$ enthalten sind. Die Masse muss damit erhalten bleiben, das bedeutet

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(t, x) dx = 0.$$

Mit dem Reynoldschen-Transporttheorem folgt nun

$$\int_{\omega(t)} \partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}(\rho(t, x)v(t, x)) dx = 0.$$

Die Beliebigkeit von ω zeigt nun die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (3.6)$$

Im Fall $\rho = \text{const}$ ist dies gerade die Inkompressibilitätsbedingung.

Zur Herleitung einer Impulsbilanz betrachten wir eine Volumenkraft $f : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit massebezogener Kraftdichte f und eine äußere Kraft $b : \partial\omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit flächenbezogener Kraftdichte b . Die kontinuierliche Version der Beziehung $(mv)' = F$ lautet dann

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(t, x)v(t, x) dx = \int_{\omega(t)} \rho(t, x)f(t, x) dx + \int_{\partial\omega(t)} b(t, x) dx.$$

In Worten bedeutet das: zeitliche Änderung des Gesamtimpulses in $\omega(t)$ = Volumenkräfte + Oberflächenkräfte. Wenden wir das Reynoldsche-Transporttheorem nun komponentenweise an, so erhalten wir

$$\int_{\omega(t)} \partial_t(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i v) dx = \int_{\omega(t)} \rho f_i dx + \int_{\partial\omega(t)} b_i dx$$

für $i = 1, 2, 3$. Um nun eine Differentialgleichung abzuleiten, müssen wir die Oberflächen-Kräfte b besser verstehen. Die kontinuierliche Version der Drehimpulserhaltung lautet nach dem obigen

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} (x - \bar{x}) \wedge (\rho v) dx = \int_{\omega(t)} (x - \bar{x}) \wedge (\rho f) dx + \int_{\partial\omega(t)} (x - \bar{x}) \wedge b dx.$$

Der Satz von Reynolds liefert

$$\begin{aligned} & \int_{\omega(t)} (x - \bar{x}) \wedge (\partial_t(\rho v) + \sum_j \partial_j(\rho v_j v)) dx \\ &= \int_{\omega(t)} (x - \bar{x}) \wedge (\rho f) dx + \int_{\partial\omega(t)} (x - \bar{x}) \wedge b dx. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Identität

$$\operatorname{div}((x - \bar{x}) \wedge \rho v)_i v = ((x - \bar{x}) \wedge \sum_j \partial_j (\rho v_j v))_i$$

verwendet.

3.4 Der Spannungstensor

Der folgende Satz spezifiziert die Kräfteübertragung entlang der Oberfläche eines Kontrollvolumens.

Satz 3.4.1 (Cauchy-Schnittprinzip). *Es gebe eine Abbildung $b : S^2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass für jede Unterteilung von Ω in die Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 mit stetig differenzierbarer Schnittfläche Γ die von Ω_2 auf Ω_1 ausgeübte Kraft $F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1}$ gegeben ist durch*

$$F_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1} = \int_{\Gamma} b(n, x) ds_x$$

mit der äußeren Einheitsnormalen n an Ω_2 . Dann hängt b linear von n ab, das heißt es existiert eine Abbildung $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so dass

$$b(n, x) = \sigma(x)n.$$

Hierbei ist S^2 die Menge aller möglichen Einheitsnormalenvektoren.

Die Abbildung σ heißt Spannungstensor. Die hinreichende Bedingung des Satzes wird als Cauchy-Axiom bezeichnet.

Beweis. Wir betrachten die Impulserhaltungsgleichung im Tetraeder $\omega = \tilde{V}$, dessen dem Nullpunkt (bzw. x) gegenüberliegende Seite die Normale η habe. Mit dem Mittelwertsatz folgt für ein $y \in \tilde{V}$

$$\begin{aligned} & |\tilde{V}| (\partial_t (\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v) - \rho f_j)(y) \\ = & \int_{\tilde{V}} \partial_t (\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v) - \rho f_j dx = \int_{\partial \tilde{V}} b_j(\eta, x) = \sum_{k=1,2,3} \int_{S_k} b_j(-e_k, x) ds_x + \int_S b(\eta, x) dx \\ & = \sum_{k=1,2,3} |S_k| b_j(-e_k, x^{(k)}) + |S| (b(\eta, x^{(0)})). \end{aligned}$$

Hierbei sind S_k die Seitenflächen des Tetraeders. Nutzen wir nun die spezielle Beziehung $|S_k| = \eta_k |S|$ mit der Normalen η_k auf die Fläche S_k , so erhalten wir

$$\frac{|V|}{|S|} (\partial_t (\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v) - \rho f_j(y)) = \sum_{k=1,2,3} b_j(e_k, x^{(k)}) \eta_k + b_j(\eta, x^{(0)}).$$

Unter der Annahme, dass $\eta_j > 0$, für $j = 1, 2, 3$ (nach Rotation) ist folgt, $\frac{|\tilde{V}|}{|S|} \rightarrow 0$ für $|S| \rightarrow 0$ sowie $x^{(k)} \rightarrow x$ für $x = 0, 1, 2, 3$. Also erhalten wir

$$b_j(\eta, x) = - \sum_{k=1}^3 b_j(-e_k, x) \eta_k.$$

Setzen wir schließlich

$$\sigma_{jk}(x) = -b_j(-e_k, x),$$

so erhalten wir die Behauptung mit

$$\sigma\eta = b(\eta, x).$$

□

Wir verwenden nun den Spannungstensor σ in der Impuls-Bilanz. Dabei erhalten wir zunächst mit dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial\omega(t)} b ds_x = \int_{\partial\omega(t)} \sigma n ds_x = \int_{\omega(t)} \operatorname{div}(\sigma(t, x)) dx.$$

Damit folgt

$$\int_{\omega(t)} \partial_t(\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v) - \rho f_j - (\operatorname{div}(\sigma))_j dx = 0$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (3.6), erhalten wir

$$\int_{\omega(t)} \rho \partial_t v_j + \rho v \cdot \nabla v_j - (\operatorname{div}(\sigma))_j - \rho f_j dx = 0.$$

Es ist nämlich nach der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t(\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v) = v_j(\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v)) + \rho \partial_t v_j + \nabla v_j \cdot (\rho v) = \rho \partial_t v_j + \nabla v_j \cdot (\rho v).$$

Damit erhalten wir aufgrund der Beliebigkeit des Gebietes ω die Differentialgleichung

$$\rho \partial_t v_j + \rho v \cdot \nabla v_j - (\operatorname{div}(\sigma))_j - \rho f_j = 0.$$

Verwenden wir die Notation $(v \cdot \nabla)v = \sum_{j=1}^3 v_j \partial_j v$, so erhalten wir die kontinuierliche Impulserhaltungsgleichung

$$\rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) - \operatorname{div}\sigma = \rho f. \quad (3.7)$$

Des Weiteren können wir aus der Impuls und Drehimpulserhaltung die Symmetrie des Spannungstensors σ herleiten.

Satz 3.4.2. σ aus dem vorherigen Satz ist symmetrisch

Beweis. Aus der Drehimpulserhaltung mit $b = \sigma\eta$ und o.B.d.A $\bar{x} = 0$ erhalten wir

$$a \cdot \int_{\omega(t)} x \wedge [\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v v_l)]_{l=1, \dots, d} = a \cdot \int_{\omega(t)} x \wedge (\rho f) dx + a \cdot \int_{\partial\omega(t)} x \wedge (\sigma\eta) ds_x$$

für alle $a \in \mathbb{R}^3$. Wir schreiben unter Verwendung der Identität $a \cdot (b \wedge c) = (a \wedge b) \cdot c$ den Randterm als

$$\begin{aligned}
a \cdot \int_{\partial\omega(t)} x \wedge (\sigma\eta) ds_x &= \int_{\partial\omega(t)} (a \wedge x) \cdot (\sigma\eta) ds_x = \int_{\partial\omega(t)} (\sigma^T(a \wedge x)) \cdot \eta ds_x \\
&= \int_{\omega(t)} \operatorname{div}(\sigma^T(a \wedge x)) dx = \int_{\omega(t)} \partial_j(\sigma^T(a \wedge x))_j dx \\
&= \int_{\omega(t)} (\partial_j \sigma_{ij})(a \wedge x)_i + \sigma_{ij}(a \wedge \partial_j x)_i dx \\
&= \int_{\omega(t)} (\operatorname{div} \sigma)_i (a \wedge x)_i + \sigma_{ij}(a \wedge e_j)_i dx \\
&= \int_{\omega(t)} (x \wedge \operatorname{div} \sigma) \cdot a + \sigma_{ij}(a \wedge e_j)_i dx.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt

$$a \cdot \int_{\omega(t)} [x \wedge (\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v v_l))_{l=1,\dots,d} + (\rho f) - \operatorname{div} \sigma] dx = \int_{\omega(t)} \sigma_{ij}(a \wedge e_j)_i dx.$$

Insgesamt folgt unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung sowie der Impulserhaltungsgleichung

$$\int_{\omega(t)} \sigma_{ij}(a \wedge e_j)_i dx = 0.$$

Also, da das Kontrollvolumen beliebig war

$$\sigma_{ij}(a \wedge e_j)_i = 0.$$

Für $a = e_1$ ergibt sich $e_1 \wedge e_1 = 0$, $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_1 \wedge e_3 = -e_2$ und damit

$$0 = \sigma_{ij}(a \wedge e_j)_i = \sigma_{32} - \sigma_{23}.$$

Also $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Analoge Rechnungen mit $a = e_{2,3}$ zeigen dann $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ und $\sigma_{13} = \sigma_{31}$. \square

3.5 Energieerhaltung

Die kinetische und die potentielle Energie haben wir mit massebezogenen Dichten durch

$$e = \frac{|v|^2}{2} + u$$

beschrieben. Die zeitliche Veränderung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho e dx &= \int_{\omega(t)} \rho f \cdot v dx + \int_{\partial\omega(t)} (\sigma\eta) \cdot v ds_x \\
&\quad - \int_{\partial\omega(t)} q \cdot n ds_x + \int_{\omega(t)} \rho g dx.
\end{aligned}$$

Hierbei beschreibt die linke Seite die zeitliche Änderung der Energie, bestehend aus der kinetischen Energie $\int_{\omega(t)} \frac{1}{2} \rho |v|^2$ und der inneren Energie $\int_{\omega(t)} \rho u$. Der erste und der zweite Term auf der rechten Seite beschreiben die durch Volumen- und Oberflächenkräfte zugeführte Leistung, der dritte Term die durch den Abfluss von Wärme über den Rand verlorene Wärmeenergie und der vierte Term die durch äußere Wärmequellen zugeführte Energie. Mit dem Transporttheorem und dem Satz von Gauß können wir folgern

$$\int_{\omega(t)} \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e v) - \rho f v - \operatorname{div}(\sigma v) + \operatorname{div} q - \rho g dx = 0,$$

was auf die entsprechende Differentialgleichung

$$\partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e v) - \rho f v - \operatorname{div}(\sigma v) + \operatorname{div} q - \rho g = 0 \quad (3.8)$$

führt. Setzen wir die Kontinuitätsgleichung (3.6) in (3.8) ein, vereinfacht sich dies zu

$$\rho(\partial_t e + \nabla e \cdot v) - \rho f v - \operatorname{div}(\sigma v) + \operatorname{div} q - \rho g = 0 \quad (3.9)$$

Für den kinetischen Anteil von e erhalten wir unter Verwendung der Impulserhaltungsgleichung (3.7)

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \frac{|v|^2}{2} + \rho (\nabla \frac{|v|^2}{2}) \cdot v &= \rho \partial_t \frac{|v|^2}{2} + \rho \partial_i \left(\frac{|v|^2}{2} \right) v_i \\ &= \rho v \cdot \partial_t v + \rho (v \cdot \partial_i v) v_i \\ &= v \cdot (\rho \partial_t v + \rho v_i \partial_i v) = v \cdot (\operatorname{div}(\sigma) + \rho f), \end{aligned}$$

wobei die Impulserhaltung im letzten Schritt verwendet wurde. Für die σ Terme gilt

$$\begin{aligned} v \cdot \operatorname{div}(\sigma) - \operatorname{div}(\sigma v) &= v_i \partial_j \sigma_{ij} - \partial_k (\sigma_{kl} v_l) \\ &= v_i \partial_j \sigma_{ij} - (\partial_k \sigma_{kl}) v_l - \sigma_{kl} \partial_k v_l \\ &= v_i \partial_j \sigma_{ij} - v_l \partial_k \sigma_{kl} - \sigma_{kl} \partial_k v_l \\ &= -\sigma_{kl} \partial_k v_l = -\sigma : Dv. \end{aligned}$$

Damit erhält man schließlich die folgende Formulierung des Energieerhaltungssatzes:

$$\rho \partial_t u + \rho v \cdot \nabla u - \sigma : Dv + \operatorname{div} q - \rho g = 0. \quad (3.10)$$

3.6 Zusammenfassung und erste Anwendungen

Wir haben die folgenden fundamentalen Erhaltungsgleichungen in Euler-Koordinaten hergeleitet:

- (i) $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0$, Kontinuitätsgleichung/Massenerhaltungsgleichung,
- (ii) $\rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) - \operatorname{div} \sigma = \rho f$, Impulserhaltungsgleichung,
- (iii) $\rho \partial_t u + \rho v \cdot \nabla u - \sigma : Dv + \operatorname{div} q - \rho g = 0$ Energieerhaltungsgleichung.

Um zu einem wohlbestimmten System zur Bestimmung von ρ , v und u für gegebene f, g zu gelangen, werden weitere materielle Zusammenhänge, sogenannte konstitutive Beziehungen benötigt. Diese Beziehungen sollen den Spannungstensor σ sowie den Fluß q als Funktionen in ρ, v und u festlegen. Beispiele für solche konstitutive Beziehungen sind etwa das Hooksche-Gesetz oder das Fouriersche-Gesetz.

Beispiel 3.6.1. Für eine Wärmeleitung in einem strömungsfreien Gebiet, d.h. $v = 0$ und damit $\partial_t \rho = 0$, benutzen wir den aus der Thermodynamik folgenden Zusammenhang

$$\partial_t u = C_v(T) \partial_t T$$

mit der Temperatur T . Das Fouriersche-Gesetz sagt

$$q = -\lambda \nabla T$$

und wir erhalten aus der Energieerhaltung

$$\rho C_v(T) \partial_t T - \lambda \operatorname{div}(\nabla T) = \rho g$$

mit der spezifischen Wärme $C_v(t)$, die meist als konstant angenommen wird.

Kapitel 4

Gase und Flüssigkeiten (Fluide)

4.1 Modellannahmen

Die Erhaltungsgleichungen sind zu allgemein und damit zu komplex um praktische Situationen zu simulieren. In vielen Fällen lassen sich die Gleichungen aber sinnvoll vereinfachen.

4.2 Eulergleichungen

Die Eulergleichungen für inkompressible, isotherme und reibungsfreie Strömungen lauten mit den obigen Annahmen

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{4.1}$$

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + f. \tag{4.2}$$

Für den Druck wird keine zusätzliche Gleichung benötigt. Wir haben dabei die Beziehung

$$\operatorname{div} \sigma = -\operatorname{div}(pI) = -\nabla p$$

verwendet. Wegen

$$\sigma : Dv = -pI : Dv = -p \operatorname{div} v = 0$$

ist zudem die Energieerhaltung erfüllt. Man beachte jedoch, dass Reibungsfreiheit im Allgemeinen eine zu starke Vereinfachung ist. Der Druck p tritt als Lagrange-Multiplikator zur Nebenbedingung $\operatorname{div} v = 0$ auf. Statt aus dem Transporttheorem und dem 2.ten Newtonschen-Gesetz können die Euler-Gleichungen auch aus der sogenannten Boltzmann-Gleichung der statistischen Physik hergeleitet werden. Die Euler-Gleichungen gehören zur Klasse der nichtlinearen Erhaltungsgleichungen und haben ähnlich Eigenschaften wie zum Beispiel wie die Transport- und die Wellengleichung. Insbesondere können auch glatte Anfangsdaten zu Unstetigkeit also zu sogenannten Schocks führen. Die Existenz globaler Lösungen kann im Allgemeinen nur unter restriktiven Bedingungen an die Anfangsdaten bewiesen werden. Die kinetische Energie bleibt unter der Annahme, dass ein festes Volumen vollständig ausgefüllt bleibt, erhalten, da keine dissipativen Terme im System auftreten. Insbesondere kommt das System nie zum Stillstand. In zwei Raumdimensionen kann man zeigen, dass Lösungen existieren, die dieses Prinzip verletzen und für homogene Anfangsdaten zu nicht trivialen Geschwindigkeitsfeldern führen. Dies induziert schließlich, dass die Annahme der Reibungsfreiheit möglicherweise eine zu starke Vereinfachung ist.

| Begriffe und Vereinfachungen | Gleichung | Beschreibung | Beispiele |
|------------------------------|--|---|--------------------|
| Reibungsfreie Strömungen | $\sigma = -pI$ mit Druck p | Nur Druckkräfte werden übertragen. Keine Reibung zwischen Partikeln | Gase |
| Isotherm | T konstant in Zeit und Raum | Temperatur konstant, keine äußere Wärmezufuhr | Fluss |
| Inkompressibel | ρ konstant | keine Dichteänderung nur durch sehr hohen Druck möglich | Wasser und Luft |
| Viskose Strömungen | $\sigma = 2\mu\epsilon(v) + \lambda\text{tr}\epsilon(v)I - pI$ | Es tritt innere Reibung auf | Honig und Motoröl |
| Stationär | $\partial_t v = 0$ | keine zeitliche Änderung der Geschwindigkeit | Fluss, Schornstein |

4.3 Navier-Stokes-Gleichungen

Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben isotherme, viskose Strömungsvorgänge, bei denen der Spannungstensor durch

$$\sigma = 2\mu\text{sym}(Dv) + \lambda\text{div}(v)I - pI \quad (4.3)$$

mit dem symmetrischen Gradienten $\text{sym}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ sowie $\epsilon(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^T)$ gegeben sind. Es gilt

$$\text{div}Dv = \Delta v$$

sowie

$$\text{div}Dv^T = \nabla(\text{div}v).$$

Damit können wir (4.3) unter Verwendung von $\text{div}((\text{div}v)I) = \nabla\text{div}v$ vereinfachen zu

$$\text{div}\sigma = \mu\Delta v + (\lambda + \mu)\nabla\text{div}v - \nabla p. \quad (4.4)$$

Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \text{div}(\rho v) &= 0 \\ \rho \partial_t v + \rho(v \cdot \nabla)v - \mu\Delta v - (\lambda + \mu)\nabla\text{div}v &= -\nabla p + \rho f. \end{aligned}$$

Ist nun ρ variabel, so wird eine Zustandsgleichung, $p = p(\rho)$ zur Beschreibung von p benötigt. Die Gleichungen nennen sich kompressible Navier-Stokes-Gleichungen.

Im inkompressiblen Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{div}v &= 0, \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla)v - \eta\Delta v &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + f, \end{aligned}$$

mit der kinetischen Viskosität $\eta = \frac{\mu}{\rho}$. Die Gleichungen werden als Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet. Im stationären Fall gilt $\partial_t v = 0$. Sind zudem $|v|$ und $|\nabla v|$ klein, so kann unter Umständen der Term $(v \cdot \nabla)v$ vernachlässigt werden und wir erhalten durch

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0 \\ -\eta \Delta v + \frac{1}{\rho} \nabla p &= f \end{aligned}$$

das sogenannte Stokesche-System, für welches Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nachgewiesen werden können. Um zu verstehen unter welchen Voraussetzungen diese Vereinfachung gerechtfertigt ist, führen wir eine Entdimensionalisierung durch. Seien dafür V und l die Charakteristischen Größen für Geschwindigkeit und Länge der Strömung. Wir setzen $v(x) = V \hat{v}(\hat{x})$ mit $\hat{x} = l^{-1}x$ und erhalten

$$(v \cdot \nabla)v = \frac{V^2}{l} (\hat{v} \cdot \tilde{\nabla}) \hat{v},$$

und

$$\eta \Delta v = \frac{\eta V}{l^2} \tilde{\Delta} \hat{v},$$

wobei $\tilde{\nabla} = \nabla_{\hat{x}}$ und $\tilde{\Delta} = \Delta_{\hat{x}}$ seien. Setzen wir weiter $p = P \hat{p}(xl^{-1})$ so folgt

$$\nabla p = \frac{P}{l} \tilde{\nabla} \hat{p}(xl^{-1}).$$

Mit $f = F \hat{f}(xl^{-1})$ folgt schließlich die entdimensionalisierte Gleichung in \hat{x}

$$\frac{V^2}{l} (\hat{v} \cdot \tilde{\nabla}) \hat{v} - \frac{\eta V}{l^2} \tilde{\Delta} \hat{v} = -\frac{1}{\rho} \tilde{\nabla} \hat{p} l^{-1} + F \hat{f}.$$

Das bedeutet die Vereinfachung $(v \cdot \nabla)v = 0$ ist gerechtfertigt wenn $|v|, |\nabla v|$ klein sind und zusätzlich

$$\frac{V^2}{l} \ll \frac{\eta V}{l^2} \Leftrightarrow \frac{Vl}{\eta} \ll 1$$

gilt. Die Zahl

$$Re = \frac{lV}{\eta}$$

heißt hierbei Reynolds-Zahl. Die Stokeschen-Gleichungen sind also anwendbar für kleine Reynolds-Zahlen. Es muss also $Re \ll 1$ gelten. Dies ist der Fall für hohe Viskosität η , kleine Durchmesser l und kleine charakteristische Geschwindigkeiten V .

4.4 Spezielle Lösungen und Turbulenzen

Spezielle Lösungen können Aufschluss über typische Eigenschaften eines Modells geben.

Beispiel 4.4.1.

(i) *Couette-Strömung: Wir betrachten eine Strömung zwischen zwei Platten, einer ruhenden und einer bewegten Platte. Aufgrund von Viskosität ist die Geschwindigkeit an den Platten durch deren Bewegung vorgegeben. Für stationäre Situationen vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen unter den Annahmen*

$$v(t, x) = \phi(x_3)e_1, \quad p(t, x) = q$$

zu $\operatorname{div} v = 0$, $\partial_t v = 0$ und $(v \cdot \nabla)v = v_1 \partial_{x_1} v = 0$ und somit

$$-\mu \phi''(x_3) = 0.$$

Mit den Randbedingungen $\phi(0) = 0$ und $\phi(a) = v_0$ folgt

$$\phi(x_3) = \frac{v_0}{a} x_3, \quad v(t, x) = \frac{v_0}{a} x_3 e_1,$$

d.h. v ist in x_3 -Richtung linear.

Beispiel 4.4.2.

(ii) *Poiseuille-Strömung: Wir betrachten eine Strömung zwischen verschiedenen Platten, die durch einen Druckunterschied verursacht wird. Der Ansatz*

$$v(t, x) = \phi(x_3)e_1$$

reduziert die Navier-Stokes-Gleichungen zu

$$-\mu \phi''(x_3)e_1 = -\nabla p(x).$$

Dies impliziert $\partial_2 p = \partial_3 p = 0$ und p hängt nur von x_1 ab. Damit ist die rechte Seite der Gleichung abhängig von x_1 und die linke Seite anhängig von x_3 , was impliziert dass beide Seiten konstant sind, d.h. $\partial_1 p = c$ und

$$\mu \phi''(x_3) = c.$$

Daraus folgt

$$p(x_1) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L} x_1, \quad \phi(x_3) = \frac{p_1 - p_2}{2L\mu} x_3(a - x_3).$$

Damit stellt sich ein parabolisches Strömungsprofil ein. Wir wollen nun das gleiche Problem ohne innere Reibung betrachten. Ohne Reibungseffekte sind Randbedingungen für v nicht sinnvoll und die Strömung kann als unabhängig von x_2 und x_3 angenommen werden. Wir dürfen $v(t, x) = \phi(t, x_1)e_1$ annehmen. Die Divergenzfreiheit $\operatorname{div} v = \partial_{x_1} \phi(t, x_1) = 0$ impliziert nun, dass ϕ auch nicht von x_1 abhängt. Die Eulergleichung liefert

$$\rho \partial_t \phi = -\partial_{x_1} p.$$

Da die linke Seite hier nur von t abhängt, ist p bezüglich x_1 eine affin lineare Funktion und es gilt

$$p(t, x_1) = c_1(t) + c_2(t)x_1.$$

Aus den Randbedingungen $p(t, 0) = p_1$ und $p(t, L) = p_2$ folgt

$$P(t, x) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L} x_1$$

und somit

$$\phi(t) = \frac{p_1 - p_2}{\rho L} t + \phi(0).$$

Beispiel 4.4.3.

(iii) *Rotationsfreie Strömungen: Existiert ein Potential des Geschwindigkeitsfeldes v , d.h. es gilt*

$$v(t, x) = \nabla\phi(t, x)$$

und v ist somit rotationsfrei. Im Fall von Inkompressibilität folgt damit

$$-\Delta\phi(t, x) = 0$$

das bedeutet ϕ ist harmonisch mit den von v induzierten Randbedingungen. Im stationären Fall vereinfacht sich die Impulserhaltungsgleichung mit $f = 0$ wegen

$$-\Delta v_j = -\Delta\partial_j\phi = -\partial_j\Delta\phi = 0$$

zu

$$(v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Dies impliziert die Identität $p = -\frac{\rho}{2}|v|^2$, denn es gilt

$$\partial_j p = -\rho v \cdot \partial_j v.$$

Das bedeutet p entspricht der Dichte der kinetischen Energie.

Beispiel 4.4.4.

(iv) *Turbulenz: Schwierigkeiten beim Nachweis der Wohlgestelltheit der Navier-Stokes-Gleichungen sind eng verbunden mit dem Auftreten von Turbulenzen. Darunter versteht man das Auftreten von Verwirbelungen auf mehreren Längenskalen. Charakteristisch sind dabei Selbstähnlichkeiten und scheinbar chaotisches Verhalten sowie empfindliche Abhängigkeiten der Lösung von den Daten (Kräfte und Randbedingungen). Beispiele sind von Flugzeugen verursachte Verwirbelungen, das Umrühren von Kaffee mit Milch und spezielle Oberflächen von Golfbällen. Die obigen Beispiele beschreiben laminare also schichtartige Strömungen. Bei wachsender Geschwindigkeit bzw. größerer Reynolds-Zahl gehen laminare Strömungen typischerweise in turbulente Strömungen über.*

4.5 Charakterisierung des Spannungstensors

Wir haben nachgewiesen, dass der Spannungstensor eine symmetrische Matrix ist. Thermodynamische Beobachtungen implizieren den Zusammenhang

$$\sigma = \hat{S}(\rho, T, Dv).$$

Wir zeigen, dass \hat{S} nur vom symmetrischen Teil von Dv abhängt und im linearen Fall durch zwei Parameter bestimmt ist. Dazu nehmen wir eine inkompressible und isotherme Situation an. Das Prinzip der Beobachterunabhängigkeit impliziert

$$\hat{S}(\partial_t Q Q^T + Q Dv Q^T) = Q \hat{S}(Dv) Q^T \quad (4.5)$$

für $Q \in \mathbb{SO}(3)$. Die Formel für die transformierte Geschwindigkeit folgt für eine Familie von Koordinatentransformationen $Q(t) =: [0, T] \rightarrow \mathbb{SO}(3)$ aus

$$x^*(t, x) = Q(t)x(t).$$

Wir erhalten damit

$$v^*(t, x) = \partial_t x^*(t, x) = \partial_t Q(t)x(t) + Q(t)\partial_t x(t)$$

also

$$D_*v^* = \partial_t QQ^T + QDvQ^T.$$

Lemma 4.5.1. *Die Identität (4.5) impliziert*

$$\hat{S}(A) = \hat{S}((A + A^T)/2)$$

das bedeutet \hat{S} hängt nur vom symmetrischen Anteil einer Matrix ab.

Beweis. Für jede schiefsymmetrische Matrix $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist

$$Q(t) = e^{-tW} \in \mathbb{SO}(3).$$

Insbesondere gilt $Q(0) = I$ und $\partial_t Q(t)|_{t=0} = -W$. Aus (4.5) folgt

$$\hat{S}(-W + A) = \hat{S}.$$

Dann erhalten wir mit

$$W = A - \text{sym}(A) = A - (A + A^T)/2 = (A - A^T)/2$$

die Behauptung. □

Es lässt sich nun zeigen, dass \hat{S} in drei Raumdimensionen eine spezielle Form haben muss. Der folgende berühmte Satz liefert uns diese Form.

Satz 4.5.2 (Rivlin-Eriksen). *Eine Abbildung $\hat{\sigma} : \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ ist beobachterunabhängig, d.h. es gilt*

$$\hat{\sigma}(Q A Q^T) = Q \hat{\sigma}(A) Q^T \tag{4.6}$$

für alle $Q \in \mathbb{SO}(3)$, genau dann wenn gilt

$$\hat{\sigma}(A) = a_0(i_A)I + a_1(i_A)A + a_2(i_A)A^2 \tag{4.7}$$

mit Funktionen $a_0, a_1, a_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und den Invarianten i_A von A . Dabei gilt

$$i_A = [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2\lambda_3]$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A .

Beweis.

(i) Wir zeigen zunächst, dass die Gleichung (4.7) die Gleichung (4.6) impliziert. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} Q \hat{\sigma}(A) Q^T &= Q(a_0(i_A)I + a_1(i_A)A + a_2(i_A)A^2)Q^T = a_0(i_A)I + Q a_1(i_A) Q^T + a_2(i_A) Q A^2 Q^T \\ &= a_0(i_A)I + Q a_1(i_A) Q^T + a_2(i_A) (Q A Q^T)^2. \end{aligned}$$

Mit $i_A = i_{Q A Q^T}$ (ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte) folgt dann

$$Q \hat{\sigma}(A) Q^T = a_0(i_{Q A Q^T})I + a_1(i_{Q A Q^T})Q A Q^T + a_2(i_{Q A Q^T})(Q A Q^T)^2 = \hat{\sigma}(Q A Q^T).$$

(ii) Wir zeigen, dass es ausreicht (4.7) für Diagonalmatrizen aus (4.6) herzuleiten. Es gelte also nun (4.6) allgemein und (4.7) für Diagonalmatrizen. Dann folgt für $A = QDQ^T$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(A) &= \hat{\sigma}(QDQ^T) = Q\hat{\sigma}(D)Q^T = Q(a_0(i_A)I + a_1(i_A)D + a_2(i_A)D^2)Q^T \\ &= a_0(i_A)I + a_1(i_A)QDQ^T + a_2(i_A)QD^2Q^T = a_0(i_A)I + a_1(i_A)A + a_2(i_A)A^2.\end{aligned}$$

(iii) Sei nun $A = D$ eine Diagonalmatrix. Mit $Q = Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{SO}(3)$ folgt

$$\hat{\sigma}(A)e_1 = QQ^T\hat{\sigma}(A)Qe_1 = Q\hat{\sigma}(Q^T A Q)e_1 = Q\hat{\sigma}(A)e_1.$$

d.h. $\hat{\sigma}(A)e_1$ ist Eigenvektor von Q zum Eigenwert 1. Da der Eigenraum des Eigenwerts 1 von e_1 aufgespannt wird, folgt somit

$$\hat{\sigma}(A)e_1 = t_1(A)e_1$$

und analog $\hat{\sigma}(A)e_j = t_j(A)e_j$ für $j = 2, 3$. Dies impliziert nun

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1(A) & 0 & 0 \\ 0 & t_2(A) & 0 \\ 0 & 0 & t_3(A) \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen nun das für eine beliebige Permutation π von $\{1, 2, 3\}$

$$t_{\pi(j)}(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \lambda_{\pi(3)}) = t_j(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

gilt. Dabei genügt es dies für Elementarpermutationen zu zeigen. Betrachte zum Beispiel die Permutationsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, was der Permutation $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3)$ entspricht. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}\left(\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\right) &= \hat{\sigma}\left(Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}Q^T\right) \\ &= Q\hat{\sigma}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\right)Q^T = \begin{pmatrix} t_2(A) & 0 & 0 \\ 0 & t_1(A) & 0 \\ 0 & 0 & t_3(A) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das bedeutet die Reihenfolge der Diagonalmatrix ändert sich entsprechend. Analog zeigt man dies für die Permutationen $(1, 2, 3) \rightarrow (3, 2, 1)$ und $(1, 2, 3) \rightarrow (1, 3, 2)$. Die Identität (4.7) ist äquivalent zu

$$t_1(A) = a_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_1^2$$

$$t_2(A) = a_0 + a_1\lambda_2 + a_2\lambda_2^2$$

$$t_3(A) = a_0 + a_1\lambda_3 + a_2\lambda_3^2.$$

Für jedes $A = D$ ist also ein Lineares Gleichungssystem zu lösen. Falls die Eigenwerte alle verschieden sind, kann man die Koeffizienten a_j durch Polynominterpolation bestimmen. Falls zwei Eigenwerte gleich sind zum Beispiel $\lambda_1 = \lambda_2$, so folgt aus dem oben gezeigten

$$t_1(A) = t_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t_2(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = t_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t_2(A).$$

Dann setzt man $a_2 = 0$ und erhält a_1, a_0 aus

$$t_j(A) = a_0 + a_1 \lambda_j, \quad j = 1, 3.$$

Wenn alle Eigenwerte gleich sind, dann gilt $t_1 = t_2 = t_3$ und es ist

$$\hat{\sigma}(A) = a_0 I$$

mit $a_0 = t_1(A)$. □

Bemerkung 4.5.3. Für einen linearen Zusammenhang muss $a_2 = 0, a_1 = \text{const}$ sowie

$$a_0(i_A) = \bar{a}_0(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \bar{a}_0(\text{tr}A) = \alpha(\text{tr}A)$$

gelten. Das bedeutet aber

$$\hat{\sigma}(A) = \alpha \text{tr}(A) I + \beta A.$$

Insbesondere folgt

$$\hat{\sigma}(Dv) = 2\mu \text{sym}(Dv) + \lambda \text{tr}(Dv) I - pI$$

mit Volumenviskosität λ und Scherviskosität μ . Fluide mit diesem Zusammenhang heißen Newtonsche-Fluide.

Kapitel 5

Elastische Festkörper

5.1 Lagrange-Darstellung und Verzerrungstensor

Prinzipiell ist die mathematische Beschreibung von Festkörpern identisch mit der von Fluiden. Für stationäre Verformungen ist die Euler-Sichtweise allerdings ungeeignet. Eine Verformung des Feststoffes deformiert zwar das Feststoffgitter, ändert aber in vielen Fällen nicht die Nachbarschaftsbeziehungen der Atome und Moleküle. Die Lagrange-Schreibweise eignet sich daher besser, da man in Lagrangischen Koordinaten leichter die ursprünglichen Nachbarschaftsbedingungen nachvollziehen kann. Man betrachtet eine Deformation $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Die Impulserhaltung in der Referenzkonfiguration ist dann

$$\rho \partial_t^2 \phi - \operatorname{div}(\sigma) = f \quad \text{in } \Omega. \quad (5.1)$$

Da Ω ein festes Gebiet ist, tritt der konvektive Anteil der materiellen Ableitung nicht auf. Der Spannungstensor ist hier bezüglich der Referenzkonfiguration zu verstehen und beschreibt die Kräfte zwischen Teilgebieten $\phi(\omega_1)$ und $\phi(\omega_2)$ mit $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$. Er wird als 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor bezeichnet. Durch Transformation erhält man die Beziehung zum Cauchy-Spannungstensor

$$\sigma(F) = \det F \sigma^C(F) F^{-T}$$

mit dem Deformationsgradienten $F = D\phi$. Elastische Körper verhalten sich ähnlich wie elastische Federn und wir müssen analog zum Hookschen-Gesetz einen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang zwischen Auslenkung und Rückstellkraft herstellen. Der Abstand zwischen Punkten x und $x + a$ in der Referenz-Konfiguration ist unter der Deformation ϕ gegeben durch

$$|\phi(x + a) - \phi(x)|^2 \approx |\phi(x) + D\phi(x)a - \phi(x)|^2 = a^T D\phi(x)^T D\phi(x)a.$$

Die Symmetrische Matrix $C := D\phi(x)^T D\phi(x)$ heißt Cauchy-Green-Verzerrungstensor und beschreibt lokale Längenveränderungen. Für Starrkörperbewegungen gilt $C = I$, d.h. Verformungen sind durch Abweichungen von C von I beschrieben. Aus der Energieerhaltung wissen wir, dass man σ als Funktion des Deformationsgradienten

$$\sigma(x) = \hat{\sigma}(x, D\phi(x))$$

annehmen darf. Im Fall $C = I$ gilt $\hat{\sigma}(I) = 0$ und die Taylorapproximation liefert uns hier für $C \approx I$, also für kleine Verzerrungen, dass

$$\sigma(x, D\phi(x)) = \hat{\sigma}(x, C) \approx \hat{\sigma}(I) + D_C \hat{\sigma}(I)(C - I) = D_C \hat{\sigma}(I)(C - I).$$

Weiter erhalten wir unter der Annahme $\phi(x) = x + u(x)$ für u klein

$$\begin{aligned} C - I &= D\phi(x)^T D\phi(x) - I \\ &= D(I + u)^T D(I + u) - I = (I + Du^T)(I + Du) - I \\ &= Du^T + Du + Du^T Du \approx Du^T + Du. \end{aligned}$$

Für kleine Verschiebungen $u(x) = \phi(x) - x$ ist also

$$C - I = 2\epsilon(u), \quad \text{mit } \epsilon(u) = \text{sym}(Du).$$

Damit folgt der lineare Spannungs-Dehnungszusammenhang für ein isotropes Material

$$\sigma(x, D\phi(x)) = \mathcal{C}\epsilon(u), \quad \text{mit } \mathcal{C} = 2D\hat{\sigma}(I). \quad (5.2)$$

Wir hatten hier Homogenität des Materials angenommen, das bedeutet die Funktion $\hat{\sigma}$ hängt nicht von x ab. Mit dem Satz von Rivlin-Eriksen folgt dann, dass

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\epsilon(u))I + 2\mu\epsilon(u). \quad (5.3)$$

λ und μ sind hier die sogenannten Lamé-Konstanten. Wir erhalten damit die Gleichung

$$\rho \partial_t^2 u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \text{div} u = f. \quad (5.4)$$

5.2 Hyperelastizität

Ein Material heißt hyperelastisch, wenn eine differenzierbare Funktion $W : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor gegeben ist durch

$$\sigma(x, F) = D_F W(x, F).$$

In diesem Fall können wir die gesamte Energie einer Deformation ϕ definieren durch

$$E(\phi) = \int_{\Omega} W(x, \nabla \phi(x)) dx - \int_{\Omega} \rho f \cdot \phi dx.$$

Dabei ist der erste Term auf der rechten Seite die elastische Energie und der zweite Term der rechten Seite die verrichtete Arbeit. Als wirkende Kraft definieren wir die Variation dieses Funktionals, das heißt wir setzen

$$\begin{aligned} F[\psi] &= \frac{d}{ds} E(\phi + s\psi)|_{s=0} = \int_{\Omega} DW(x, \nabla \phi) : \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \rho f \cdot \psi dx \\ &= - \int_{\Omega} \text{div} \sigma \cdot \psi dx - \int_{\Omega} \rho f \cdot \psi dx, \end{aligned}$$

wobei wir $\sigma = DW$ verwendet haben. Daraus ergibt sich das Kräftegleichgewicht

$$\rho \partial_t^2 \phi = \text{div} \sigma + \rho f \quad (5.5)$$

bzw. im stationären Fall

$$\text{bzw. } - \text{div} \sigma = \rho f. \quad (5.6)$$

Als Konsequenz der Beobachterunabhängigkeit ergibt sich folgender Satz.

Satz 5.2.1. *Eine hyperelastische Materialbeschreibung ist beobachterunabhängig genau dann, wenn $W(F) = W(QF)$ für alle $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $Q \in \mathbb{SO}(3)$. Insbesondere hängt W nur von $C = F^T F$ ab, d.h. es existiert \hat{W} mit $W(F) = \hat{W}(C)$.*

Beweis. Der Cauchy-Spannungstensor ist beobachterunabhängig genau dann, wenn

$$\sigma^C(QFQ^T) = Q\sigma^C(F)Q^T.$$

Beachten wir den Zusammenhang des 1.Piola-Kirchhoff-Spannungstensors mit dem Cauchy-Spannungstensor

$$\sigma(F) = \det F \sigma^C(F) F^{-T}$$

so erhalten wir Beobachterunabhängigkeit genau dann, wenn gilt

$$\sigma(QF) = Q\sigma(F) \Leftrightarrow DW(F) = Q^T DW(QF). \quad (5.7)$$

Für festes Q definieren wir nun

$$W_Q = W(QF).$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} W_Q(F + G) &= W(QF + QG) = W(QF) + D_F W(QF) : QG + o(\|G\|) \\ &= W(QF) + Q^T DW(QF) : G + o(\|G\|). \end{aligned}$$

Ableiten nach G liefert dann

$$DW_Q(F) = Q^T DW(QF).$$

Wegen (5.7) gilt die Aussage des Satzes nun genau dann, wenn gilt

$$D(W_Q(F) - W(F)) = 0 \quad (5.8)$$

das heißt die Differenz ist unabhängig von F . Nun sieht man aber schnell, dass diese Identität aus

$$W(F) = W(QF) = W_Q(F)$$

folgt. Zum Nachweis der Umkehrung benutzen wir, dass aus (5.8) folgt, dass $W_Q(F) - W(F)$ für jede Matrix $Q \in \mathbb{SO}(3)$ konstant ist. Damit gilt dann

$$W_Q(F) - W(F) = C(Q).$$

Daraus folgt nun mit $F = Q^{p-1}$

$$W(Q^p) = W(Q^{p-1}) + C(Q) = W(Q^{p-2}) + 2C(Q)$$

und schließlich

$$W(Q^p) = W(I) + pC(Q).$$

o.B.d.A $W(I) = 0$ und wir folgern im Fall $C(Q) \neq 0$, dass $|W(Q^p)| \rightarrow \infty$ für $p \rightarrow \infty$. Da nun $Q^p \in \mathbb{SO}(3)$ und $\mathbb{SO}(3)$ kompakt ist, kann dies nicht gelten. Es muss also

$$C(Q) = 0$$

sein. Zum Nachweis der zweiten Aussage verwenden wir die Polarzerlegung $F = RU$, $R \in \mathbb{SO}(3)$, $U = (F^T F)^{\frac{1}{2}}$ und erhalten damit

$$W(F) = W(RU) = W(U) = W((F^T F)^{\frac{1}{2}}) = \tilde{W}(F^T F).$$

□

5.3 Isotropie

Wir bezeichnen den Cauchy-Spannungstensor σ^C als isotrop, falls

$$\sigma^C(x, F) = \sigma^C(x, FQ)$$

für alle $Q \in \mathbb{SO}(3)$. F beschreibt Verformungen des Quaders $[0, 1]^3$ bzw. FQ Verformungen des rotierten Quaders. Der 1.Piola-Kirchhoff-Spannungstensor ist damit isotrop, falls

$$\sigma(x, FQ) = \sigma(x, F)Q.$$

Nach dem vorherigen Beweis ist das äquivalent zu

$$W(x, F) = W(x, FQ)$$

für alle $Q \in \mathbb{SO}(3)$. Aus der Beobachterunabhängigkeit und der Isotropie erhalten wir

$$\tilde{W}(F^T F) = W(F) = W(FQ) = \tilde{W}((FQ)^T FQ) = \tilde{W}(Q^T F^T FQ)$$

also $\tilde{W}(C) = \tilde{W}(Q^T CQ)$. Damit hängt \tilde{W} nur von den Eigenwerten von C bzw. den Hauptinvarianten von C ab.

Beispiel 5.3.1. *Im Fall eines affin linearen Zusammenhangs zwischen C und σ folgt mit*

$$E = \frac{F^T F - I}{2} = \frac{C - I}{2},$$

dass durch

$$W(F) = \tilde{W}(E) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}E)^2 + \mu\|E\|^2$$

eine hyperelastische Materialbeschreibung gegeben ist. Hierbei ist $\|\cdot\| = \|\cdot\|_F = \sqrt{\text{tr}(E^T E)}$ die Frobeniusnorm. Der Spannungstensor σ ist dann

$$\sigma = \lambda(\text{tr}E)I + 2\mu E.$$

Ein Material mit diesen Eigenschaften wird St. Venant-Kirchhoff-Material genannt. Mit dem linearisierten Dehnungstensor $E \approx \epsilon(u)$ erhalten wir wie oben die linearen Elastizitätsgleichungen, die für kleine Verschiebungen relevant sind.

Bemerkung 5.3.2.

(i) sinnvolle Forderungen sind $W(F) \rightarrow \infty$ für $\|F\| \rightarrow \infty$ und $W(F) \rightarrow \infty$ für $\det F \rightarrow 0$. Das bedeutet große Streckungen und Kompressionen sind mit unendlich großer Energie verbunden. Dies schließt konvexe Energien W aus.

(ii) Als polykonvexes Material bezeichnet man Materialien mit

$$W(F) = \bar{W}(x, F, \det F, \text{cof} F)$$

mit einer konvexen Funktion \bar{W} .

Kapitel 6

Wellenphänomene

6.1 Elektrische Felder

Ein elektrisches Feld E gibt die auf eine Ladung q wirkende Kraft F mittels $F = qE$ an. Punktladungen q_1, q_2, \dots, q_n erzeugen das Feld

$$E(x) = \sum_i h \frac{q_i}{|x - x_i|^3} (x - x_i).$$

Es gilt das Gesetz von Gauß

$$\int_{\partial\omega} E \cdot \eta ds = 4\pi h \sum_{i=1, \dots, n, x_i \in \bar{\omega}} q_i \quad (6.1)$$

und mit dem Satz von Stokes

$$\int_{\gamma} E \cdot t dr = 0. \quad (6.2)$$

falls γ keinen der Punkte x_i enthält. Grund dafür ist, dass E für $x \neq x_j$ rotationsfrei ist. In einem Kontinuum haben wir anstelle der Punktladung eine volumenbezogene Ladungsdichte ρ . Die rechte Seite von (6.1) wird also zu

$$Q(\omega) = \int_{\omega} \rho dx,$$

und die entsprechende kontinuierliche Version des Gesetzes von Gauß ist damit

$$\int_{\partial\omega} \epsilon E(x) \cdot \eta(x) ds_x = \int_{\omega} \rho dx \quad (6.3)$$

mit Ladungsdichte ρ und $\epsilon = (4\pi h)^{-1}$. Dabei heißt ϵ Dielektrizitätskonstante. Da man nun keine isolierten Ladungsquellen mehr hat, gilt diese Identität für jedes Gebiet ω und wir erhalten unter Verwendung des Satzes von Gauß

$$\operatorname{div}(\epsilon E) = \rho. \quad (6.4)$$

Da (6.2) für jede geschlossene Kurve gilt, folgt nach dem Satz von Stokes auch

$$\operatorname{rot}(E) = 0. \quad (6.5)$$

Bezeichnen wir mit j die Stromdichte oder auch den Ladungsfluss. Es gilt also

$$j \cdot \eta = \lim_{\Delta A, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta A}$$

wobei Δq die Ladung ist, die in einem Zeitintervall der Länge Δt durch ein Flächenstück ΔA mit Normalenvektor η fließt. Für die Ladungsbilanz gilt dann

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho dx = - \int_{\partial \omega} j \cdot \eta ds_x.$$

Unter Verwendung des Satzes von Gauß und da ω beliebig ist erhalten wir so die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} j = 0. \quad (6.6)$$

6.2 Das Ohmsche-Gesetz

Elektrische Felder bewegen Ladung, wobei ein Widerstand entgegen wirkt. Dies motiviert das Ohmsche-Gesetz

$$j = \sigma E \quad (6.7)$$

mit der elektrischen Leitfähigkeit σ , welche konstant ist. Wir betrachten in den folgenden drei Abschnitten ein zeitlich unveränderliches elektrisches Feld E . Im Fall einer zeitlich unveränderlichen Ladungsdichte folgt $\operatorname{div} j = 0$ bzw. $\operatorname{div} E = 0$ und aus (6.4) insbesondere $\rho = 0$ in Ω . Eine Ladung muss also am Rand konzentriert sein. Eine entsprechende Umformulierung von (6.1) lautet dann mit flächenspezifischer Ladungsdichte ρ_{Γ}

$$\int_{\partial \omega} \epsilon E \cdot \eta ds_x = \int_{\omega \cap \Gamma} \rho_{\Gamma} ds_x. \quad (6.8)$$

Wenn Γ das Gebiet ω in zwei Hälften teilt, erhalten wir unter Beachtung von $\operatorname{div} E = 0$ in $\omega \setminus \Gamma$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\omega_-} \operatorname{div}(\epsilon E) dx + \int_{\omega_+} \operatorname{div}(\epsilon E) dx \\ &= \int_{\partial \omega_-} (\epsilon E) \cdot \eta_- ds + \int_{\partial \omega_+} (\epsilon E) \cdot \eta_+ ds \\ &= \int_{\partial \omega} (\epsilon E) \cdot \eta ds + \int_{\Gamma \cap \omega} \epsilon E|_{\omega_-} \cdot \eta_{\omega_-} + \epsilon E|_{\omega_+} \cdot \eta_{\omega_+} ds \\ &= \int_{\partial \omega} (\epsilon E) \cdot \eta ds + \int_{\Gamma \cap \omega} [\epsilon E \cdot \eta] \\ &= \int_{\Gamma \cap \omega} \rho_{\Gamma} + \int_{\Gamma \cap \omega} [\epsilon E \cdot \eta] ds. \end{aligned}$$

Da ω beliebig ist folgt

$$-\rho_{\Gamma} = [\epsilon E \cdot \eta]. \quad (6.9)$$

Auch im Fall flächenbezogener Ladungsdichten gilt (6.2) für jede geschlossene Kurve γ und man erhält daraus die Existenz eines elektrostatischen Potentials V für E also

$$E = -\nabla V$$

und wir erhalten

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad E \text{ wirbelfrei.}$$

In einem leitenden Medium im statischen Zustand, d.h. $j = 0$, folgt

$$0 = j = \sigma E = -\sigma \nabla V \Rightarrow V = \text{const.}$$

Insbesondere ist dann das elektrische Feld innerhalb des Leiters gleich Null. Für das elektrische Feld sowie das elektrostatische Potential ergeben sich die Darstellungen

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho(y)}{|x-y|^3} (x-y) dy$$

und

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy.$$

Beispiel 6.2.1. Wir betrachten den Faradayschen Käfig, d.h. ein leitendes Medium Ω umschließt ein nichtleitendes Medium Ω_0 . Im Außenraum $\mathbb{R}^3 \setminus (\Omega \cup \Omega_0)$ sei ein stationäres elektrisches Feld E gegeben. In Ω ist V konstant, das bedeutet $V = V_0$. Das Potential V ist stetig und in Ω_0 gilt $\operatorname{div} E = 0$ und somit gilt für V

$$\Delta V = 0 \quad \text{in } \Omega_0.$$

und

$$V = V_0 \quad \text{auf } \partial\Omega_0.$$

Die einzige Lösung ist also $V = V_0$, also ist V konstant in Ω_0 und es folgt $E = -\nabla V = 0$ in Ω_0 . Eine Oberflächenladung an den äußeren Rand von Ω kompensiert das elektrische Feld.

Bemerkung 6.2.2. Als Energie eines elektrischen Feldes bezeichnet man die Größe

$$W = \int_{\Omega} \frac{\epsilon}{2} |E|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{\epsilon}{2} |\nabla V|^2 dx.$$

Zur Herleitung dieser Definition siehe [1] Abschnitt 5.11.

6.3 Magnetische Induktion

Stromführende Leiter üben Kräfte auf Magnetpole aus. Für einen Leiter in Form einer Geraden der Länge 1 mit Richtungsvektor a lässt sich dies mit dem magnetischen (Induktions-)Feld

$$B(x) = \frac{hI}{|x - Px|^2} a \wedge (x - Px) \tag{6.10}$$

erklären, mit Stromstärke I und Proportionalitätskonstante h . Hierbei ist Px die Projektion von x auf den Leiter. Das bedeutet die Feldlinien sind senkrecht zur Richtung des Leiters und zum Vektor $x - Px$. Ersetzen wir I durch die Stromdichte j so erhalten wir

$$\operatorname{rot} B = \mu j, \quad \operatorname{div} B = 0. \quad (6.11)$$

mit der Magnetischen Permeabilität $\mu = 2\pi h$. Zur genauen Herleitung von (6.11) siehe [1] Abschnitt 5.11.

6.4 Die Lorentz-Kraft

Als Lorentzkraft bezeichnet man die von einem Magnetfeld auf eine bewegte Ladung wirkende Kraft

$$F = -qv \wedge B,$$

bzw. in kontinuierlicher Form

$$F_\omega = \int_\omega f dx = \int_\omega j \wedge B dx$$

mit der Kraftdichte f . Damit erhält man

$$f = j \wedge B.$$

Beispiel 6.4.1. *Wir betrachten zwei parallele Leiter mit Abstand d . Durch die Leiter fließen Ströme der Stärken I_1 und I_2 . Wir wählen uns nun ein Koordinatensystem so, dass die Leiter in Richtung der x_3 -Achse orientiert sind und Leiter 1 den Nullpunkt und Leiter 2 den Punkt $(d, 0, 0)^T$ enthalte. Die von Leiter 1 erzeugte magnetische Induktion ist gegeben durch*

$$B_1(x) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1}{|x - Px|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auf den im zweiten Leiter in einem Flächenstück γ_L der Länge L fließenden Strom I_2 wirkt damit die Kraft

$$F = \int_{\gamma_L} I_2 e_3 \wedge B_1 dx = -\mu \frac{L I_1 I_2}{2\pi d} e_1.$$

Bemerkung 6.4.2. *Einem Magnetfeld wird die Energie*

$$W = \int_\Omega \frac{1}{2\mu} |B|^2 dx$$

zugeordnet. Zur Herleitung siehe [1] Abschnitt 5.11.

6.5 Maxwell-Gleichungen

Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern werden durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben. Diese leitet man aus den folgenden Beobachtungen her.

- (i) Der durch einen geschlossenen Leiter γ fließende Strom I ist proportional zu $\partial_t B$ und zur von γ eingeschlossenen Fläche A_\perp , das heißt

$$I \sim \partial_t B A_\perp.$$

- (ii) In einer bewegten Leiterschleife in einem zeitlich und räumlich konstanten Magnetfeld fließt der Strom

$$I \sim B \partial_t A_\perp.$$

Daraus kann man schließen, dass der Strom proportional ist zur Änderung der Größe BA_\perp , dem sogenannten magnetischen Fluss durch die Leiterschleife. Mit dem Ohmschen-Gesetz führt das unter Verwendung des Satzes von Stokes auf

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} B \cdot \eta ds \sim \int_{\gamma} E \cdot t dr = \int_{\Gamma} \text{rot} E \cdot n ds.$$

Dabei ist Γ eine von γ umrandete Fläche. Betrachtet man mehrere Normalenrichtungen und skaliert entsprechend, so erhält man

$$\partial_t B \sim \text{rot} E.$$

bzw.

$$\partial_t B + \text{rot} E = 0. \quad (6.12)$$

Aus dem Gaußschen-Gesetz

$$\text{div}(\epsilon E) = \rho$$

und mit der Ladungserhaltung (6.6)

$$\partial_t \rho + \text{div} j = 0$$

folgt dann

$$\text{div}(\epsilon \partial_t E + j) = 0$$

bzw.

$$\epsilon \partial_t E + j = \text{rot} G. \quad (6.13)$$

Wegen $\text{rot} B = \mu j$ im stationären Fall ersetzen wir G durch $\mu^{-1} B$ und erhalten das Ampère-Maxwell Gesetz

$$\epsilon \mu \partial_t E - \text{rot} B + \mu j = 0. \quad (6.14)$$

Insgesamt erhalten wir das Maxwell-System

$$\text{div}(\epsilon E) = \rho, \quad \text{div} B = 0 \quad \text{Gauß-Gesetz} \quad (6.15)$$

$$\partial_t B + \text{rot} E = 0, \quad \text{Induktionsgesetz}, \quad (6.16)$$

$$\epsilon \mu \partial_t E - \text{rot} B + \mu j = 0, \quad \text{Durchflutungsgesetz}. \quad (6.17)$$

In einem nichtleitenden Medium, das bedeutet $\rho = j = 0$ und ϵ, μ konstant, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon\mu\partial_t^2 E - \operatorname{rot}\partial_t B = \epsilon\mu\partial_t^2 E + \operatorname{rot}(\operatorname{rot}E) \\ &= \epsilon\mu\partial_t^2 E + \nabla(\operatorname{div}E) - \Delta E = \epsilon\mu\partial_t^2 E - \Delta E. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass in einem nicht leitenden Medium $\operatorname{div}E = 0$ gilt. Wir haben also die Wellengleichung

$$\partial_t^2 E - c^2 \Delta E = 0 \tag{6.18}$$

mit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ gefolgert (c ist Lichtgeschwindigkeit). Eine entsprechende Wellengleichung folgt analog auch für B .

Kapitel 7

Quellen

[1] C.Eck, H.Garcke, P.Knabner, *Mathematische Modellierung* Lehrbuch 2007 Springer.