Numerik (Teil 2)

Sommersemester 2018

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Freitag, den 27. April 2018, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass die Menge der regulären $n \times n$-Matrizen eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert.
(ii) Zeigen Sie, dass für $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und hinreichend kleine Zahlen $h \in \mathbb{R}$ die Matrix $I + hE$ regulär ist mit

$$(I + hE)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h^k E^k.$$

Aufgabe 2. (i) Berechnen Sie die Anzahl der Gleitkommazahlen sowie die positiven Extrema g_{min} und g_{max} für die IEEE-Formate *single* und *double precision*.
(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{rd}(\pi)$ für $b = 2$, $p = 5$ und $b = 10$, $p = 4$.
(iii) Wie lässt sich das Auftreten von *Overflow* bei der Berechnung von $(a^2 + b^2)^{1/2}$ vermeiden, wenn $\max\{|a|, |b|\} > g_{max}^{1/2}$ und $|a|, |b| \le g_{max}/2$ gilt?

Aufgabe 3. (i) Beweisen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ in Gleitkommaarithmetik konvergiert.
(ii) Zeigen Sie, dass die Gleitkommaaddition $+_G$ nicht assoziativ ist.

Aufgabe 4. (Numerik I - Quiz) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

Für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, jede orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Qx\| = \|x\|$.	
Ein stabiler Algorithmus impliziert eine gute Konditionierung.	
Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lässt sich die Inverse A^{-1} einer LU-zerlegbaren Matrix A mit dem Aufwand $\mathcal{O}(n^4)$ bestimmen.	
Ist A symmetrisch und invertierbar, so ist A positiv definit.	
Die Eigenschaft $a_{ii} \neq 0$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist notwendig für die Wohldefiniertheit des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens.	
Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ gilt $\ker AB = \ker A$.	
Jedes lineare Programm in Normalform besitzt eine Lösung.	
Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, so definiert die Singulärwertzerlegung eine Diagonalisierung von A.	