# Numerik (Teil 2)


Sommersemester 2018

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos


## Übungsblatt 2

**Abgabe:** Bis Freitag, den 11. Mai 2018, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

**Aufgabe 1.** (i) Für $x \in [-5, 5]$ sei $f(x) = (1+x^2)^{-1} = \arctan'(x)$. Verwenden Sie die Identitäten

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}, \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}},$$

$$\sin(x)\sin(y) - \cos(x)\cos(y) = -\cos(x+y), \quad \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x),$$

um zu beweisen oder für $n = 0, 1, 2, 3$ zu verifizieren, dass

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^{n/2}}{(1+x^2)^{(n+1)/2}} \times \begin{cases} \cos((n+1)\arctan(x)), & n \text{ gerade}, \\ \sin((n+1)\arctan(x)), & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

(ii) Folgern Sie, dass $\|f^{(2n)}\|_\infty = (2n)!$ und dass die Lagrange-Interpolationspolynome von $\widetilde{f}(x) = f(5x)$ im Intervall $[-1, 1]$ nicht notwendigerweise uniform für $n \to \infty$ gegen $\widetilde{f}$ konvergieren.

**Aufgabe 2.** Konstruieren Sie Stützstellen $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ im Intervall $[a, b]$, so dass für die Lagrange-Interpolation jeder Funktion $f \in C^{n+1}([a, b])$ gilt

$$\|f - p\|_{C^0([a,b])} \le 2^{-n}\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^{n+1} \frac{\|f^{(n+1)}\|_{C^0([a,b])}}{(n+1)!}.$$

**Aufgabe 3.** (i) Geben Sie ein ausschließlich auf arithmetischen Grundoperationen basierendes Verfahren mit möglichst wenigen Operationen zur Auswertung des Polynoms $(x+3)^{16}$ an.
(ii) Vergleichen Sie den Aufwand der direkten Auswertung des Polynoms $p(x) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x^n$ mit dem unter Verwendung der äquivalenten Darstellung

$$p(x) = a_0 + x\big(a_1 + x\big(a_2 + \ldots x\big(a_{n-2} + x\big(a_{n-1} + x a_n\big)\big)\ldots\big)\big).$$

**Aufgabe 4.** Seien $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und $\ell \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $0 \le j \le n$ definiere

$$H_{j,\ell}(x) = \frac{(x - x_j)^\ell}{\ell!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne j}}^{n} \Big(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\Big)^{\ell+1}.$$

Zeigen Sie, dass für die Ableitungen von $H_{j,\ell}$ die Identitäten $\frac{d^k}{dx^k} H_{j,\ell}(x_m) = \delta_{k\ell}\delta_{jm}$ für $0 \le k \le \ell$ und $0 \le m \le n$ gelten.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss18/num/`