Numerik (Teil 2)

Sommersemester 2018

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 3

Abgabe: Bis Freitag, den 1. Juni 2018, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i = 0, 1, \ldots, n$, definierte Partitionierung von $[0, 1]$ sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{1/2}$. Zeigen Sie, dass $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \leq cn^{-2}$ mit einer von n unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt. Skizzieren Sie f_n für $n = 2, 4, 8$.

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie, dass es zu jedem Intervall $[a_0, a_1] \subset \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Polynome $q_{0,0}, q_{0,1}, q_{1,0}, q_{1,1} \in \mathcal{P}_3$ gibt, so dass $q_{j,k}^{(\ell)}(a_m) = \delta_{jm}\delta_{k\ell}$ für $j, k, \ell, m = 0, 1$ gilt. Zeichnen Sie die Polynome für das Intervall $[0, 1]$.
(ii) Folgern Sie, dass auf jeder Partitionierung $\mathcal{T}_n$ mit Gitterpunkten $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zu gegebenen Werten $y_0, y_1, \ldots, y_n$ und $r_0, r_1, \ldots, r_n$ ein eindeutig definierter Spline $s \in \mathcal{S}^{3,1}(\mathcal{T}_n)$ mit $s(x_i) = y_i$ und $s'(x_i) = r_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, existiert und geben Sie eine Darstellung an.

Aufgabe 3. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 0, 1, \ldots, n$ sei die Funktion $B_{i,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $(B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots, B_{n,n})$ eine Basis des Polynomraums $\mathcal{P}_n$ definieren.
(ii) Beweisen Sie die Formel $B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$.

Aufgabe 4. (Essay) Schreiben Sie eine kurze Abhandlung von etwa ein bis zwei Seiten, in der Sie diverse Aspekte der numerischen Rundung diskutieren. Dabei soll z.B. eine Anwendung im Vordergrund stehen, die Sie frei wählen können.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss18/num/`