Numerik (Teil 2)

Sommersemester 2018

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Freitag, den 15. Juni 2018, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf dem reellen, n-dimensionalen Vektorraum V und $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $w \in V$ gilt

$$w = \sum_{j=0}^{n-1} \langle w, v_j \rangle v_j.$$

Aufgabe 2. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $C = AB$. Für $i, j \in \{1, 2\}$ seien $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, die Unterblöcke von A, B und C, so dass

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Berechnung von C mit dem Standardverfahren zur Berechnung des Produkts von Matrizen auf $\mathcal{O}(n^{\log_2 8})$ Multiplikationen führt.
(ii) Zeigen Sie, dass mit

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}), & M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}, \\ M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}), & M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}), \\ M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}, & M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}), \\ M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7, & C_{12} &= M_3 + M_5, \\ C_{21} &= M_2 + M_4, & C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6. \end{aligned}$$

(iii) Sei $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie ein rekursives Verfahren zur Berechnung von AB, das $\mathcal{O}(7^k) = \mathcal{O}(n^{\log_2 7})$ Multiplikationen verwendet.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Lösung der reellen trigonometrischen Interpolationsaufgabe durch die Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cos(kx_j), \quad b_\ell = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \sin(\ell x_j)$$

für $k = 0, 1, \ldots, m$ und $\ell = 1, 2, \ldots, m-1$ mit $x_j = 2\pi j/n$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, und $n = 2m$ gegeben ist.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie $n+1$ Quadraturpunkte und -gewichte im Intervall $[-1, 1]$, so dass die dadurch definierte Quadraturformel exakt vom Grad $2n+1$ für $n = 0, 1, 2$ ist. Verwenden Sie die Formeln, um die Funktion $x \mapsto x^5$ im Intervall $[-1, 1]$ approximativ zu integrieren.