Numerik (Teil 2)

Sommersemester 2018

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 5

Abgabe: Bis Freitag, den 29. Juni 2018, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. Verwenden Sie die Darstellung des Fehlers der Lagrange-Interpolation

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

um für die Trapez- beziehungsweise Simpson-Regel zu beweisen, dass

$$|I(f) - Q_{Trap}(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{C^0([a,b])},$$

$$|I(f) - Q_{Sim}(f)| \le \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_{C^0([a,b])}.$$

Aufgabe 2.
Es sei $(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Raum $C([a,b])$. Zeigen Sie, dass mit den Initialisierungen $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = x - \beta_0$ sowie der Rekursionsvorschrift

$$p_{j+1}(x) = (x - \beta_j) p_j(x) - \gamma_j p_{j-1}(x)$$

mit den Koeffizienten $\beta_j = \langle x p_j, p_j \rangle / \langle p_j, p_j \rangle$ und $\gamma_j = \langle p_j, p_j \rangle / \langle p_{j-1}, p_{j-1} \rangle$ eine Folge von paarweise orthogonalen Polynomen $p_j \in \mathcal{P}_j$ definiert wird.

Aufgabe 3. Es sei $f \in C([a,b])$ und für eine Zerlegungsfeinheit $h = (b-a)/N$ sei $T(h)$ der Wert der summierten Trapezregel, das heißt

$$T(h) = \frac{h}{2} \Big[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih) + f(b) \Big].$$

Zeigen Sie, dass die Extrapolation $T^*(h) = (T(h) - 2^\gamma T(h/2))/(1 - 2^\gamma)$ der Werte $T(h)$ und $T(h/2)$ mit einem geeigneten Parameter γ auf die summierte Simpson-Regel führt.

Aufgabe 4. Es sei $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Gewichtsfunktion. Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens Polynome $(\pi_j)_{j=0,\dots,n}$ derart, dass $\pi_j \in \mathcal{P}_j$ für $j = 0, 1, \dots, n$, $\langle \pi_j, \pi_k \rangle_\omega = \delta_{jk}$ für alle $0 \le j, k \le n$ mit $j \ne k$, $\langle \pi_j, p \rangle_\omega = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_{j-1}$ und $j = 1, 2, \dots, n$ gilt und die Polynome eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bilden.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss18/num/`

Hinweis zur Evaluation: Die Teilnahme ist noch bis zum 24. Juni, 23:45 Uhr, möglich. Bitte überprüfen Sie gegebenenfalls Ihren Spam-Ordner auf Benachrichtigungen.