Numerik (Teil 2)

Sommersemester 2018

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
Dipl.-Math. A. Papathanassopoulos

Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Freitag, den 13. Juli 2018, 14 Uhr, in den Briefkasten vor dem Cip-Pool im zweiten Stock des RZ (Hermann-Herder-Str. 10).

Aufgabe 1. (Quiz)
Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

Das Produkt zweier dünnbesetzter Matrizen ist eine dünnbesetzte Matrix.	
Die Matrizen A und $A^\top$ besitzen dieselben Eigenwerte und Eigenvektoren.	
Für $b = 10$, $p = 4$, $e_{min} = -3$, $e_{max} = 3$ ist $-13 \cdot 10^{-2}$ eine normalisierte Gleitkommazahl.	
Sind $q \in \mathcal{P}_m$ und $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ eine Partitionierung $\mathcal{T}_n$ von $[a, b]$, so gilt $q\|_{[a,b]} \in \mathcal{S}^{m,m-1}(\mathcal{T}_n)$.	
Tschebyscheff-Knoten sind die Extremalstellen der Tschebyscheff-Polynome.	
Jede Newton-Cotes Formel mit $n + 1 = 2q$ Stützstellen ist exakt vom Grad $n + 2$.	
Die Matrix $S_n = (1/\sqrt{n})T_n$ definiert eine Isometrie auf $\mathbb{C}^n$, das heißt es gilt $\|S_n y\|_2 = \|y\|_2$ für alle $y \in \mathbb{C}^n$.	
Die Folge $\delta_k = \sin^2(1/k)$, $k \in \mathbb{N}$, ist quadratisch konvergent gegen Null.	

Aufgabe 2. (Essay) Schreiben Sie einen kurzen Rückblick von etwa einer Seite zum Thema *Lineare Gleichungssysteme* und erläutern Sie den Zusammenhang zur Numerik.

Aufgabe 3. (Bonuspunkte) (i) Seien $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass eine Zahl $\alpha > 0$ existiert, so dass mit $d = -\nabla g(x)$ gilt

$$g(x + \alpha d) < g(x) - \sigma\alpha\|d\|^2.$$

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ die gleiche Aussage mit $\sigma = 1$ gilt.

Aufgabe 4. (Bonuspunkte) (i) Mit $f_0 = f_1 = 1$ sei die Folge der Fibonacci-Zahlen definiert durch $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ für alle $k \geq 2$ und es sei α die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 1 + x$. Zeigen Sie, dass $\alpha^{k-1} \leq f_k \leq \alpha^k$ für alle $k \geq 0$ gilt.
(ii) Es sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass $e_0, e_1 < 1$ und $e_{k+2} \leq e_{k+1}e_k$ für alle $k \geq 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von einer Folge $(\delta_k)_{k\geq 0}$ dominiert wird, die von der Ordnung α gegen Null konvergiert, das heißt es gilt $e_k \leq \delta_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es existiert ein $q \in \mathbb{R}$ mit

$$\limsup_{k\to\infty} \delta_{k+1}/\delta_k^\alpha = q.$$

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss18/num/`