Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 1 – 18.5.2020

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 19 und 20.

Abgabe: 25.5.2020

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/ndgln`

Aufgabe 1 (2+2)**.** Wir betrachten das Räuber-Beute-Modell

$$y_1' = \alpha(1-y_2)y_1, \quad y_2' = \beta(y_1-1)y_2.$$

a) Skizzieren Sie das Phasendiagramm im Bereich $[0,2]^2$ für die Parameter $\alpha = 1$ und $\beta = 1$.

b) Begründen Sie damit das Auftreten periodischer Lösungen sowie die Positivität von Lösungen für geeignete Anfangsdaten.

Aufgabe 2 (2+2)**.** Wir betrachten das in Abbildung 1 skizzierte Fadenpendel der Länge $\ell > 0$, an dessen Ende ein Gewicht der Masse m angebracht sei.

a) Bestimmen Sie die tangentiale Beschleunigung a_{tan}, um zu zeigen, dass sich der Auslenkungswinkel $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ bei Vernachlässigung von Reibungseffekten durch die Differenzialgleichung $\phi'' = -(g/\ell)\sin(\phi)$ mit der Erdbeschleunigung g beschreiben lässt.

b) Vereinfachen Sie die Differenzialgleichung für den Fall kleiner Winkel und geben Sie die Lösung der resultierenden Gleichung in Abhängigkeit vom Anfangswinkel $\phi(0) = \phi_0$ und der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit $\phi'(0) = \omega_0$ an.

Hinweis: Sie brauchen beim Bestimmen der Lösung keine der Methoden aus Kapitel 19.6 anzuwenden. Überlegen Sie sich stattdessen, welche Funktionen die Differenzialgleichung $y'' = -y$ erfüllen.

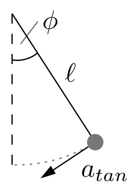

Abbildung 1. Mathematische Beschreibung eines Fadenpendels

Aufgabe 3 (1+1+2)**.** Bestimmen Sie nichttriviale Lösungen der Differenzialgleichungen $y' = ty$, $y' = \sin(t)y$, und $y' = \cos(t)e^y$ und geben Sie diese in Abhängigkeit vom Anfangswert $y(0) = y_0$ an. Geben Sie außerdem das größtmögliche $T > 0$ (ebenfalls in Abhängigkeit von y_0) an, sodass die bestimmte Lösung für alle $t \in [0,T)$ definiert ist.

Aufgabe 4 (2+2)**.** Bestimmen und skizzieren Sie die Iterierten y^k, $k = 0, 1, \ldots, 4$, der Banachschen Fixpunktiteration

$$y^{k+1}(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y^k(s))\,\mathrm{d}s, \quad y(0) = y_0$$

für die Fälle $f(t, y) = ay$ und $y_0 = 1$ sowie $f(t, y) = 1 + y^2$ und $y_0 = 0$. Verwenden Sie jeweils die Startfunktion $y^0(t) = y_0$ für alle t.