Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 2 – 27.5.2020

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 20 und 21. Abgabe: 8.6.2020

Homepage zur Vorlesung:

https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/ndgln

Aufgabe 1. Konstruieren Sie eine autonome Differenzialgleichung $y' = f(y)$, für die eine Lösung $y \in C^1([0,T])$ mit der Eigenschaft $y \notin C^2([0,T])$ existiert.

Aufgabe 2. Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare, nichtnegative Abbildung und es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f = -\nabla g$. Zeigen Sie, dass jede Lösung $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$, die Identität

$$\int_0^t |y'(s)|^2 \,\mathrm{d}s + g(y(t)) = g(y_0)$$

für jedes $t \in [0,T]$ erfüllt.

Aufgabe 3 (3+1)**.** Es seien $y \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $\tau > 0$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definiere $t_k = k\tau$ und setze $y^k = y(t_k)$.

a) Zeigen Sie, dass für die Größen

$$d_t^- y^k = \frac{y^k - y^{k-1}}{\tau}, \quad d_t^+ y^k = \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau},$$

$k = 1, 2, \dots, K-1$, die Abschätzungen

$$|d_t^\pm y^k - y'(t_k)| \leq \frac{\tau}{2} \sup_{t \in t_k \pm [0,\tau]} |y''(t)|$$

gelten.

b) Welche Abschätzung lässt sich für die Differenz $|\widehat{d}_t y^k - y'(t_k)|$ mit der Größe

$$\widehat{d}_t y^k = \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2\tau},$$

$k = 1, 2, \dots, K-1$, beweisen?

Aufgabe 4. Seien $(y_\ell)_{\ell=0,\dots,K}$ eine nichtnegative Zahlenfolge und $\alpha, \beta \geq 0$, sodass für $\ell = 0, 1, \dots, K$ die Abschätzung

$$y_\ell \leq \alpha + \sum_{k=0}^{\ell-1} \beta y_k$$

gilt. Zeigen Sie, dass $y_\ell \leq \alpha(1+\beta)^\ell \leq \alpha \exp(K\beta)$ für $\ell = 0, 1, \dots, K$ gilt. Folgern Sie die diskrete Version des Lemmas von Gronwall.