Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 3 – 9.5.2020

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 21 und 22. Abgabe: 22.6.2020

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/ndgln`

Aufgabe 1. Für eine Inkrementfunktion Φ und $z_k \in \mathbb{R}$ seien $z : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems $z'(t) = f(t, z(t))$, $z(t_k) = z_k$, und $z_{k+1} = z_k + \tau\Phi(t_k, z_k, z_{k+1}, \tau)$. Damit seien die Konsistenzgrößen $\mathcal{C}$ und $\widetilde{\mathcal{C}}$ definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(t_k, z_k, \tau) &= \frac{z(t_{k+1}) - z_k}{\tau} - \Phi(t_k, z_k, z_{k+1}, \tau),\\ \widetilde{\mathcal{C}}(t_k, z_k, \tau) &= \frac{z(t_{k+1}) - z_k}{\tau} - \Phi(t_k, z_k, z(t_{k+1}), \tau).\end{aligned}$$

Die Inkrementfunktion Φ sei uniform Lipschitz-stetig im dritten Argument mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass für $\tau \leq 1/(2L)$ die Äquivalenz

$$c^{-1}\big|\widetilde{\mathcal{C}}(t_k, z_k, \tau)\big| \leq \big|\mathcal{C}(t_k, z_k, \tau)\big| \leq c\big|\widetilde{\mathcal{C}}(t_k, z_k, \tau)\big|$$

gilt. Geben Sie dabei die Konstante c explizit an.

Aufgabe 2. Welche Quadraturformeln liegen dem klassischen Runge–Kutta-Verfahren, der 3/8-Regel und dem Radau-3-Verfahren zugrunde und welche Exaktheitsgrade besitzen diese?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie das Butcher-Tableau des durch die Inkrementfunktion

$$\begin{aligned}&\Phi(t, y, \tau) = \frac{1}{6}(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3),\\ &\eta_1 = f(t, y),\ \ \eta_2 = f(t + \tau/2, y + \tau\eta_1/2),\\ &\eta_3 = f\big(t + \tau, y + \tau(-\eta_1 + 2\eta_2)\big)\end{aligned}$$

definierten Runge–Kutta-Verfahrens und zeigen Sie, dass es die Konsistenzordnung $p = 3$ besitzt.

Aufgabe 4 (1+3)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, sodass $\|A\| < 1$ bezüglich einer Operatornorm gilt.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $I_m - A$ invertierbar ist mit $(I_m - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.
b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung der Fixpunktgleichung $\eta = \Psi(\eta)$ für die Bestimmung eines Koeffizientenvektors $\eta \in \mathbb{R}^m$ in einem Runge–Kutta-Verfahren und diskutieren Sie dessen Wohlgestelltheit.