Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 5 – 8.7.2020

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 24.

Abgabe: 20.7.2020

Homepage zur Vorlesung:

https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/ndgln

Aufgabe 1. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die diagonalisierbare Begleitmatrix der durch $(\alpha_\ell)_{\ell=0,\dots,m}$ definierten Differenzengleichung mit linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1, v_2, \dots, v_m$. Zeigen Sie, dass die Folge $(y_k)_{k\geq 0}$ genau dann eine Lösung der homogenen Differenzengleichung ist, wenn für die Vektoren $Y_k = [y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m-1}]^\top$ gilt $Y_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \gamma_j v_j$, $k \geq 0$ mit geeigneten Zahlen $\gamma_j \in \mathbb{R}$ und den Nullstellen λ_j des Polynoms $q(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + \lambda\alpha_1 + \alpha_0$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass q das charakteristische Polynom von A ist.

Aufgabe 2 (1+1+2)**.** Untersuchen Sie die Nullstabilität folgender Rekursionen:

a) Der Fibonacci-Folge $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$.
b) Der Tschebyscheff-Rekursion $T_{k+2}(x) = 2xT_{k+1}(x) - T_k(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$.
c) Des Mehrschrittverfahrens $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = -2\tau f(t_k, y_k)$. Berechnen Sie hier außerdem die Konsistenz des Verfahrens.

Aufgabe 3 (2+1+1)**.** Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine s-fache Nullstelle des Polynoms $q(z) = z^m + \alpha_{m-1}z^{m-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ und $(y_k)_{k\geq 0}$ definiert durch $y_k = k^r\lambda^k$ mit $r \in \mathbb{N}$, $r < s$. Ferner sei für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$ der Operator $A : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ definiert durch $Af(x) = xf'(x)$.

a) Beweisen Sie die Identität
$$\sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell y_{k+\ell} = \lambda^k \sum_{\nu=0}^r \binom{r}{\nu} k^\nu \sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell \ell^{r-\nu}\lambda^\ell = \lambda^k \sum_{\nu=0}^r \binom{r}{\nu} k^\nu A^{r-\nu} q(\lambda).$$
b) Sei x_0 eine $(r+1)$-fache Nullstelle von $f \in C^r(\mathbb{R})$, das heißt es gelte $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(r)}(x_0) = 0$. Zeigen Sie, dass $A^i f(x_0) = 0$ für $i = 0, 1, \dots, r$ gilt.
c) Folgern Sie, dass $(y_k)_{k\geq 0}$ eine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung $\sum_{\ell=0}^m \alpha_\ell y_{k+\ell} = 0$ ist und diskutieren Sie die Beschränktheit dieser Folge.

Aufgabe 4. Sei $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R})$ mit $|\partial_z f(t,z)| \leq C$ für alle $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Adams–Moulton-, Adams–Bashforth-, und Adams–Bashforth–Moulton-Verfahren die Bedingungen der allgemeinen Konvergenzaussage für Mehrschrittverfahren erfüllen.