Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Praktische Übungen zur Vorlesung: Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 3 – 17.6.2020

Abgabe: 29.6.2020

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/ndgln`

Projekt 1. Das MATLAB-Programm `runge_kutta_expl.m`, das Sie von der Vorlesungshomepage herunterladen können, realisiert ein explizites Runge–Kutta-Verfahren zur Lösung einer skalaren Differenzialgleichung $y' = f(t, y)$, $y(0) = y_0$.
(i) Dokumentieren Sie jede Zeile der Unterfunktion Phi. Welches Verfahren wird hier realisiert?
(ii) Die exakte Lösung für den Fall $f(t, y) = -2y + 5\cos(t)$ und $y_0 = 2$ ist durch $y(t) = 2\cos(t) + \sin(t)$ gegeben. Bestimmen Sie für die Schrittweiten $\tau = 2^{-s}$, $s = 0, 1, \ldots, 7$, den Approximationsfehler $|y(T) - y_K|$ mit $T = t_K = 10$.
(iii) Modifizieren Sie das Programm, um das explizite Euler-Verfahren, das Euler–Collatz-Verfahren, das klassische Runge–Kutta-Verfahren und die 3/8-Regel zu realisieren.
(iv) Bestimmen Sie für alle Verfahren die Approximationsfehler $|y(T) - y_K|$ zum Zeitpunkt $T = 10$ mit den Schrittweiten $\tau = 2^{-s}$, $s = 0, 1, \ldots, 7$. Stellen Sie diese vergleichend als Polygonzüge in einer Grafik mit logarithmischer y-Achsenskalierung dar, was in MATLAB mit dem Kommando `semilogy` realisiert werden kann.

Projekt 2. (i) Modifizieren Sie das Programm aus Projekt 1 um zwei MATLAB-Routinen zur numerischen Approximation gewöhnlicher Differenzialgleichungen mit allgemeinen impliziten Runge–Kutta-Verfahren zu implementieren.
Verwenden Sie dazu einerseits eine Fixpunktiteration und andererseits das Newton-Verfahren. Als Abbruchkriterium dient jeweils die Ungleichung $|\eta_{n+1} - \eta_n| < e_{max}$ für eine sinnvolle Schranke $e_{max} > 0$.
(ii) Untersuchen Sie die jeweiligen Iterationszahlen in den Zeitschritten für das Radau-3-Verfahren am Beispiel $y' = (1 + y^2)^{1/2}$, $y(0) = 0$, im Intervall $[0, T]$ mit $T = 4$, dessen exakte Lösung durch $y(t) = \sinh(t)$ gegeben ist.