Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Praktische Übungen zur Vorlesung: Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 5 – 15.7.2020

Abgabe: 27.7.2020

Homepage zur Vorlesung:

https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/ndgln

Projekt 1. Die BDF-Verfahren *(Backward Differentiation Formulas)* sind für $m \geq 1$ gegeben durch

$$\sum_{\ell=0}^{m} \hat{\alpha}_\ell y_{k+\ell} = \tau f(t_{k+m}, y_{k+m})$$

mit den Koeffizienten $\hat{\alpha}_m = \sum_{j=1}^m 1/j$ und

$$\hat{\alpha}_\ell = (-1)^{m-\ell} \sum_{j=m-\ell}^{m} \frac{1}{j} \binom{j}{m-\ell},$$

$\ell = 0, 1, \dots, m-1$.
i) Verwenden Sie die BDF-Verfahren mit $m = 1, 2, \dots, 7$ zur numerischen Approximation des Anfangswertproblems $y' = f(t, y)$ in $(0, T]$, $y(0) = y_0$, mit $f(t, y) = -2y + 5\cos(t)$, $y_0 = 2$ und $T = 1$, dessen exakte Lösung gegeben ist durch $y(t) = 2\cos(t) + \sin(t)$.
ii) Bestimmen Sie die experimentellen Konvergenzraten zum Zeitpunkt $T = 1$ mit geeigneten Folgen von Zeitschrittweiten und dem Ansatz $e_\tau \approx c\tau^\gamma$, sodass für zwei verschiedene Schrittweiten folgt

$$\gamma \approx \log(e_\tau / e_{\tau'}) / \log(\tau/\tau').$$

Projekt 2. Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = -\alpha(y - \cos(t))$, $y(0) = 0$ im Intervall $[0, T]$ mit $T = 1$ und $\alpha = 50$.
(i) Überprüfen Sie, dass die Lösung des Problems gegeben ist durch

$$y(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\big(\sin(t) + \alpha\cos(t) - \alpha e^{-\alpha t}\big).$$

(ii) Lösen Sie das Problem approximativ mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren, dem Trapez-Verfahren sowie dem klassischen Runge–Kutta-Verfahren mit den Schrittweiten $\tau = 2^{-\ell}/10$, $\ell = 0, 1, 2, 3$. Stellen Sie die Fehler zum Zeitpunkt T vergleichend in einer Tabelle dar.
(iii) Stellen Sie die Approximationen für einige Schrittweiten und die exakte Lösung vergleichend in einer Grafik dar.