Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Philipp Tscherner

Numerik Teil II

Blatt 2 – 13.05.2020

Abgabe: Per Email an die Tutorierenden bis Mittwoch, den 27.05.2020, 10:00 Uhr.

Homepage zur Vorlesung:
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/num`

Aufgabe 1 (Lagrange-Interpolation, 4 Punkte)**.** Seien $f(x) = \sin(\pi x)$ für $x \in [0, 1]$, $x_0 = 0$ sowie $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$ sofern $n > 0$ gilt. Berechnen und skizzieren Sie das Interpolationspolynom von f für $n = 0, 1, \dots, 4$. Benutzen Sie zur Berechnung das Neville-Schema.

Aufgabe 2 (Hermite-Interpolation, 6 Punkte)**.** (a) Seien $f(x) = \sin(\pi x)$ für $x \in [0, 1]$, $x_0 = 0$ und $x_i = i/n$ für $i = 1, 2, \dots, n$ sofern $n > 0$ gilt. Berechnen und skizzieren Sie die Hermite-Interpolationspolynome für $n = 0, 1, 2$ und $\ell_i = \ell$, $i = 0, 1, \dots, n$, mit $\ell = 0, 1, 2$.
(b) Wieviele Bedingungen sind bei der Hermite-Interpolation mindestens zu erfüllen, um die Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, 1]$ tabellarisch mit einem Fehler von höchstens 10^{-3} zu erfassen? Begründen Sie Ihre Antwort auf Basis der Fehlerabschätzungen aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Tschebyscheff-Knoten, 6 Punkte)**.** (a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften der für $t \in [-1, 1]$ durch $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ definierten Funktionen:

(i) Es gilt $|T_n(t)| \le 1$ für alle $t \in [-1, 1]$.

(ii) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt
$$T_{n+1}(t) = 2t\, T_n(t) - T_{n-1}(t)$$
für alle $t \in [-1, 1]$. Insbesondere gilt $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$ und für $n \ge 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1} t^n + q_{n-1}$ mit $q_{n-1} \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$.

(iii) Für $n \ge 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos((j + 1/2)\pi/n)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, und die $n + 1$ Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

(b) Nennen Sie jeweils einen Vorteil und einen Nachteil, der sich bei der Verwendung von Tschebyscheff-Knoten ergeben kann.