



Numerik Teil II

Blatt 3 – 27.05.2020

Abgabe: Per Email an die Tutorierenden bis Mittwoch, den 10.06.2020, 10:00 Uhr.

Homepage: <https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/num>

Aufgabe 1 (4 Punkte). Verwenden Sie das Neville-Schema, um

(a) das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_3$, welches durch die Stützpunkte (x_i, y_i)

x_i	0	2	3	4
y_i	10	-2	-2	-6

für $i = 0, \dots, 3$ gegeben ist, an der Stelle $x = 5$ auszuwerten.

(b) das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_4$, welches sich durch Hinzufügen des Stützpunktes $(x_4, y_4) = (6, 10)$ ergibt, an der Stelle $x = 5$ auszuwerten.

Aufgabe 2 (4 Punkte). (a) Seien $0 \leq a < b$ und $x \mapsto g(x)$ die lineare Funktion, die die Funktion $f(x) = x^{1/2}$ an den Stützstellen a und b interpoliert. Zeigen Sie, dass für den Fehler

$$e = \max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)|$$

die Abschätzungen $e \leq (b-a)^2 a^{-3/2} / 8$ für $a > 0$ und $e \leq b^{1/2} / 4$ für $a = 0$ gelten.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$, sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{1/2}$ im Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie die Abschätzung

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq n^{-1/2} / 4.$$

(c) In welchen Bereichen ist die Fehlerabschätzung suboptimal?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Bestimmen Sie explizit die interpolierenden kubischen Splines mit natürlichen sowie Hermite-Randbedingungen $s'(-1) = 0$, $s'(1) = 3$, für die Stützstellen $x_i = -1 + i/2$ und Stützwerte $y_i = (-1)^i$, $i = 0, 1, 2, \dots, 4$, und zeichnen Sie diese.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es sei \mathcal{T}_n eine Partitionierung des Intervalls $[a, b]$ und es seien $s \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ und $g \in C^1([a, b])$, sodass $s(x_i) = g(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$ gilt. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 dx \leq \int_a^b |g'|^2 dx.$$