Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Philipp Tscherner

Numerik Teil II

Blatt 4 – 10.06.2020

Abgabe: Per Email an die Tutorierenden bis Mittwoch, den 24.06.2020, 10:00 Uhr.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i = 0, 1, \ldots, n$, definierte Partitionierung von $[0, 1]$ sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{1/2}$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq cn^{-2}$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt. Skizzieren Sie f_n für $n = 2, 4$. Vergleichen Sie die Abschätzung mit der in Aufgabe 2 (b) aus Aufgabenblatt 3.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** (a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\ell k 2\pi/n} = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } \ell, \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(b) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $(\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}) \subset \mathbb{C}^n$ definiert durch

$$\omega^k = [\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \ldots, \omega_n^{(n-1)k}]^\top \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

mit der n-ten Einheitswurzel $\omega_n = e^{\mathrm{i}2\pi/n}$ die Eigenschaft $\omega^k \cdot \omega^\ell = n\delta_{k\ell}$ besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $n = 2m$. Konstruieren Sie Zahlen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, sodass mit den Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ der Lösung der zugehörigen komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe und der Funktion

$$q(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} e^{\mathrm{i}kx}$$

die Interpolationseigenschaft $q(x_j) = w_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, für $x_j = 2\pi j/n$ erfüllt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Verwenden Sie die Fourier-Transformation, um das trigonometrische Polynom p mit $p(x) = \sum_{k=0}^{3} \beta_k e^{\mathrm{i}kx}$ zu bestimmen, welches die folgenden Stützpunkte (x_j, y_j) für $j = 0, \ldots, 3$ interpoliert

x_j	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y_j	2	1	0	4

Skizzieren Sie außerdem den Real- und Imaginärteil des Polynoms p.