Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Philipp Tscherner

Numerik Teil II

Blatt 5 – 24.06.2020

Abgabe: Per Email an die Tutorierenden bis Mittwoch, den 08.07.2020, 10:00 Uhr.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/num`

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Verwenden Sie die Darstellung des Fehlers der Lagrange-Interpolation

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

um für die Simpson-Regel zu beweisen, dass

$$|I(f) - Q_{Sim}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_{C^0([a,b])}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei $Q : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel mit $n+1$ Gewichten und Quadraturpunkten $(x_i, w_i)_{i=0,\ldots,n}$, die exakt vom Grad n ist.
(a) Zeigen Sie, dass

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\, \mathrm{d}x$$

für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit den durch die Stützstellen $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ definierten Lagrange-Basispolynomen $(L_i)_{i=0,\ldots,n}$.
(b) Zeigen Sie, dass im Fall der Exaktheit vom Grad $2n$ gilt, dass $w_i > 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Die Quadraturformel $Q : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad $2q$ und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,\ldots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass Q exakt vom Grad $2q+1$ ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** (a) Approximieren Sie das Integral

$$I := \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$$

durch die Trapezregel und die Simpsonregel. Berechnen Sie die Approximationsfehler.
(b) Approximieren Sie das Integral I durch die zugehörigen summierten Quadraturformeln mit den Teilintervallen $[a_{\ell-1}, a_\ell]$ für $\ell = 1, 2$ und Knoten $a_\ell = 1 + \ell(2-1)/2$ für $\ell = 0, 1, 2$. Berechnen Sie die Approximationsfehler und vergleichen Sie diese mit denen aus Teil (a).