Numerik Teil II

Blatt 6 – 08.07.2020

Abgabe: Per Email an die Tutorierenden bis Mittwoch, den 22.07.2020, 10:00 Uhr.

Homepage: `https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 &= -2 \\ 4x_1 + x_2^2 &= -11. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $x = [-3, 1]^\top$ eine Lösung von $(*)$ ist.
(b) Bestimmen Sie eine Näherung dieser Lösung mit Hilfe des Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0 = [0, 0]^\top$, sodass der Fehler bezüglich der euklidischen Norm kleiner als 10^{-3} ist.
(c) Besitzt $(*)$ noch weitere Lösungen? Falls ja, bestimmen Sie diese und approxmieren Sie sie mit dem Newton-Verfahren durch geeignete Wahl eines Startwertes.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $[a, b] = [1, 2]$ und

$$T(x) = \operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ für } x \in [a, b].$$

Die einzige Nullstelle von T in $[a, b]$ ist $x_* = \pi/2$.

(a) Berechnen Sie die Näherung $c_5 = (a_5 + b_5)/2$ an x_* aus dem Bisektionsverfahren.
(b) Berechnen Sie die Näherung x_3 an x_* aus dem Newtonverfahren mit $x_0 = 1$.
(c) Vergleichen Sie die absoluten Fehler $|c_5 - x_*|$ und $|x_3 - x_*|$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ konvex, das heißt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, 1]$ gilt $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, sowie streng monoton wachsend und sei $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = 0$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 4 (4 Bonuspunkte)**.** Sei $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten und n reellen Nullstellen $\xi_1 \leq \ldots \leq \xi_n$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 > \xi_n$ monoton gegen ξ_n konvergiert.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie mit dem CG-Verfahren die Lösung von $Ax = b$

$$\text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 100 & -8 & 0 \\ -8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und dem Startwert } x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$