Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 2 – 27.4.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 19-20. Abgabe: 10.5.2021

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss21/ndgln`

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, das heißt es existieren eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine reguläre Matrix $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $A = J^{-1}DJ$ gilt. Bestimmen sie die Lösung des Systems von Differenzialgleichungen $y' = Ay$ mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$.

Aufgabe 2. Bestimmen und skizzieren Sie die Iterierten y^k, $k = 0, 1, 2$, der Banachschen Fixpunktiteration

$$y^{k+1}(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y^k(s))\,\mathrm{d}s$$

für das SIR-Modell

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI, \\ I' &= \beta SI - \gamma I, \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

mit $\beta = 1$, $\gamma = 0.5$ und $y_0 = (0.9, 0.1, 0)^\top$. Dabei gilt $y = (S, I, R)^\top$. Verwenden Sie die Startfunktion $y^0(t) = y_0$ für alle t.
Zeichnen Sie für Ihre Skizzen jeweils S^k, I^k und R^k für den k-ten Iterationsschritt in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie etwa bis zum Zeitpunkt $T = 15$.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$, skizzieren Sie einige und diskutieren Sie die Anwendbarkeit des Satzes von Picard–Lindelöf.

Aufgabe 4 (3+1)**.** Es seien $y \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $\tau > 0$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definiere $t_k = k\tau$ und setze $y^k = y(t_k)$.

a) Zeigen Sie, dass für die Größen

$$d_t^- y^k = \frac{y^k - y^{k-1}}{\tau}, \quad d_t^+ y^k = \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau},$$

$k = 1, 2, \ldots, K-1$, die Abschätzungen

$$|d_t^\pm y^k - y'(t_k)| \leq \frac{\tau}{2} \sup_{t \in t_k \pm [0,\tau]} |y''(t)|$$

gelten.

b) Welche Abschätzung lässt sich für die Differenz $|\widehat{d}_t y^k - y'(t_k)|$ mit der Größe

$$\widehat{d}_t y^k = \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2\tau},$$

$k = 1, 2, \ldots, K - 1$, beweisen?