Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 3 – 11.5.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 19-21. Abgabe: 31.5.2021

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss21/ndgln`

Aufgabe 1. Für eine stetige Abbildung $A : [0, T] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten wir das System von Differenzialgleichungen $y' = A(t)y$.
(i) Modifizieren Sie den Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf, um die Existenz einer eindeutigen Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}^n$ zu zeigen.
(ii) Zeigen Sie, dass die Menge L aller Lösungen des Systems $y' = A(t)y$ einen Vektorraum definiert.
(iii) Betrachten Sie die Abbildung $E_0 : L \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto y(0)$, und folgern Sie, dass $\dim L = n$ gilt.

Aufgabe 2. Verwenden Sie das explizite und implizite Euler-Verfahren für die Differenzialgleichung $y'(t) = 2\alpha t y(t)$ mit Schrittweiten $\tau = 1/2^\ell$, $\ell = 1, 2, 3$, sowie dem Anfangswert $y_0 = 1$ und $\alpha = \pm 3$, um die Approximationslösungen beider Verfahren zum Zeitpunkt $T = 1$ zu bestimmen und vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3. Seien $(y_\ell)_{\ell=0,\dots,K}$ eine nichtnegative Zahlenfolge und $\alpha, \beta \geq 0$, sodass für $\ell = 0, 1, \dots, K$ die Abschätzung

$$y_\ell \leq \alpha + \sum_{k=0}^{\ell-1} \beta y_k$$

gilt. Zeigen Sie, dass $y_\ell \leq \alpha(1 + \beta)^\ell \leq \alpha \exp(K\beta)$ für $\ell = 0, 1, \dots, K$ gilt. Folgern Sie die diskrete Version des Lemmas von Gronwall.

Aufgabe 4. Sei f eine Lipschitz-stetige Funktion. Zeigen Sie, dass das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \tau f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

konsistent von der Ordnung $p = 1$ ist, das heißt dass $|\mathcal{C}(t_k, z_k, \tau)| \leq c\tau$ mit einer geeigneten Konstanten $c \geq 0$ gilt.