Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 5 – 15.6.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 19-23. Abgabe: 28.6.2021

Homepage zur Vorlesung:

https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss21/ndgln

Aufgabe 1. Für eine Schrittweite $\tau > 0$ und Zeitschritte $t_k = k\tau$, $k \in \mathbb{N}_0$, seien Werte $w_k \in \mathbb{R}$ gegeben.
(i) Konstruieren Sie das durch die drei Stützstellen $(t_{k+\ell}, w_{k+\ell})_{\ell=0,1,2}$ definierte Interpolationspolynom $q \in \mathcal{P}_2$ und integrieren Sie dieses über das Intervall $[t_{k+2}, t_{k+3}]$, um Koeffizienten $(\beta_\ell)_{\ell=0,1,2}$ zu erhalten, sodass

$$\int_{t_{k+2}}^{t_{k+3}} q(t)\,\mathrm{d}t = \tau \sum_{\ell=0}^{2} \beta_\ell w_{k+\ell}.$$

(ii) Konstruieren Sie das durch die drei Stützstellen $(t_{k+\ell}, w_{k+\ell})_{\ell=0,1,2}$ definierte Interpolationspolynom $q \in \mathcal{P}_2$ und integrieren Sie dieses über das Intervall $[t_{k+1}, t_{k+2}]$, um Koeffizienten $(\beta_\ell)_{\ell=0,1,2}$ zu erhalten, sodass

$$\int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} q(t)\,\mathrm{d}t = \tau \sum_{\ell=0}^{2} \beta_\ell w_{k+\ell}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie durch Konstruktion geeigneter Anfangswertprobleme, dass das hinreichende Konsistenzkriterium für lineare Mehrschrittverfahren

$$\sum_{\ell=0}^{m} \alpha_\ell = 0, \quad \sum_{\ell=0}^{m} \left(\alpha_\ell \ell^q - \beta_\ell q \ell^{q-1}\right) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, p,$$

notwendig ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Adams-Moulton-Verfahren unter der Bedingung

$$\tau \|\beta\|_1 L < 1$$

wohldefiniert ist, wobei L die uniforme Lipschitz-Konstante der zur Differenzialgleichung gehörenden Funktion f sei.

Aufgabe 4. Die Funktion f sei uniform Lipschitz-stetig im zweiten Argument. Es seien ein lineares, explizites Mehrschrittverfahren definiert durch $(\hat{\alpha}_\ell, \hat{\beta}_\ell)_{\ell=0,\dots,m}$ und ein lineares, implizites Mehrschrittverfahren definiert durch $(\alpha_\ell, \beta_\ell)_{\ell=0,\dots,m}$. Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ sei die Approximation y_{k+m} durch $y_{k+m} = y_{k+m}^{(\nu)}$ definiert, wobei $y_{k+m}^{(\nu)}$ durch die Iterationsvorschrift

$$y_{k+m}^{(i+1)} = -\sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell y_{k+\ell} + \tau \sum_{\ell=0}^{m-1} \beta_\ell f(t_{k+\ell}, y_{k+\ell}) + \tau \beta_m f(t_{k+m}, y_{k+m}^{(i)})$$

mit der Initialisierung $y_{k+m}^{(0)} = \widetilde{y}_{k+m}$ für

$$\widetilde{y}_{k+m} = -\sum_{\ell=0}^{m-1} \hat{\alpha}_\ell y_{k+\ell} + \tau \sum_{\ell=0}^{m-1} \hat{\beta}_\ell f(t_{k+\ell}, y_{k+\ell})$$

berechnet werde. Zeigen Sie, dass dadurch ein explizites Mehrschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = \min\{p_{expl} + \nu, p_{impl}\}$ definiert wird, wobei p_{expl} und p_{impl} die Konsistenzordnungen des expliziten beziehungsweise des impliziten Verfahrens bezeichnen.