Praktische Übungen zur Vorlesung: Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 1 – 22.4.2021

Abgabe: 3.5.2021

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss21/ndgln`

Projekt 1. In MATLAB lassen sich Differenzialgleichungen approximativ mit der Routine `ode45` lösen. Im Fall des Systems $y' = f(t, y)$ im Intervall $[0, T]$ mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ ist dies für die Abbildung $f(t, y) = Ay$ in dem MATLAB-Programm `test_ode` realisiert, welches Sie von der Vorlesungshomepage herunterladen können. Die Routine `ode45` liefert dabei eine Liste `t_vec` von Zeitpunkten $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ und eine Matrix `y_vec` mit zugehörigen Approximationen $\widetilde{y}(t_i)$ der exakten Lösungswerte $y(t_i)$ zu den Zeitpunkten t_i, $i = 0, 1, \ldots, N$. Modifizieren Sie das Programm `test_ode.m`, um folgende Anfangswertprobleme approximativ zu lösen und die Approximationslösungen grafisch darzustellen:

a) das Anfangswertproblem des Räuber-Beute-Modells

$$y_1' = \alpha y_1(1 - y_2), \quad y_2' = \beta y_2(y_1 - 1)$$

im Intervall $[0, T]$ mit $T = 10$ sowie $\alpha = 2$, $\beta = 1$ und den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 3$ und $y_2(0) = 1$;

b) das Anfangswertproblem des Federpendels

$$my'' + ry' + D(y - \ell) = 0$$

im Intervall $[0, T]$ mit $T = 1$ und $m = 1$, $D = 1$, $\ell = 1$ und verschiedenen Werten $r \in \{0, 1, 5\}$ sowie den Anfangsbedingungen $y(0) = \ell$ und $y'(0) = 1$;

c) das Anfangswertproblem des SIR-Modells

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI, \\ I' &= \beta SI - \gamma I, \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

im Intervall $[0, T]$ mit $T = 30$, $\beta \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$, $\gamma = \frac{1}{4}$ und den Anfangsbedingungen $S(0) = 0,95$, $I(0) = 0,05$ sowie $R(0) = 0$.

Fassen Sie Ihre Beobachtungen und die Auswirkungen der verschiedenen Parameter bzw. Anfangswerte auf die Lösung für alle Probleme jeweils kurz zusammen.

Projekt 2. Ein Punktgitter (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, auf einer rechteckigen Menge $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ der Feinheiten $d_x, d_y > 0$ in x- beziehungsweise y-Richtung wird in MATLAB durch `[x,y] = meshgrid(a:dx:b,c:dy:d)` erzeugt. Dabei sind `x` und `y` Matrizen, die die x- und y-Koordinaten der Gitterpunkte enthalten. Ein diskretes Vektorfeld, das durch Matrizen `v` und `w` definiert wird, indem jedem Gitterpunkt (x_i, y_i) der Vektor (v_i, w_i) zugeordnet wird, lässt sich mittels `quiver(x,y,v,w)` visualisieren. Eine Integralkurve des diskreten Vektorfelds beginnend in einem Punkt (v_0, w_0) wird mittels `streamline(x,y,v,w,v0,w0)` dargestellt.
Das MATLAB-Programm `test_phase_diagram.m`, das Sie von der Vorlesungshomepage herunterladen können, realisiert dies für ein einfaches Beispiel.

i) Modifizieren Sie das Programm um die Phasendiagramme der Differenzialgleichungen a) und b) aus Projekt 1 und jeweils mindestens zwei zugehörige Integralkurven darzustellen. Setzen Sie dabei alle in den Gleichungen vorkommenden Parameter auf 1. Überlegen Sie anhand von Ihren Beobachtungen aus Projekt 1, was sinnvolle Werte für die betrachteten Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ sind.
Erläutern Sie anhand Ihrer Beobachtungen aus den Projekten 1 und 2, wie die Phasendiagramme der Differentialgleichungen mit deren Lösungen zusammenhängen.
ii) Warum lässt sich mit den oben beschriebenen Methoden nicht ohne weiteres ein Phasendiagramm für das SIR-Modell erstellen?
Erläutern Sie stattdessen kurz anhand ihrer Beobachtungen aus Projekt 1, inwiefern Maßnahmen, die den Transmissionskoeffizienten β senken sollen (wie das Tragen von Masken), bei der Bekämpfung einer Pandemie helfen können.