Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Praktische Übungen zur Vorlesung: Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 2 – 4.5.2021

Abgabe: 17.5.2021

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss21/ndgln`

Projekt 1. Verwenden Sie die MATLAB-Routine `ode45`, um das Zweikörperproblem

$$m_1\, y_1'' = \gamma \frac{m_1 m_2}{\|y_1 - y_2\|^2} \frac{y_2 - y_1}{\|y_1 - y_2\|},$$
$$m_2\, y_2'' = \gamma \frac{m_1 m_2}{\|y_1 - y_2\|^2} \frac{y_1 - y_2}{\|y_1 - y_2\|}$$

im zweidimensionalen Raum für verschiedene Anfangsdaten und Massenverhältnisse $m_1/m_2 \in \{1, 2, 10\}$ näherungsweise zu lösen und darzustellen. Konstruieren Sie sowohl Anfangsdaten, die zur Existenz einer für alle positiven Zeiten wohldefinierten Lösung führen, als auch Anfangsdaten, für die die Lösung nur in einem endlichen Intervall existiert.

Projekt 2. Das MATLAB-Programm `federpendel.m`, das Sie von der Vorlesungshomepage herunterladen können, realisiert das durch die Inkrementfunktion $\Phi(t_k, y_k, \tau) = f(t_k + \tau/2, y_k + \tau f(t_k, y_k)/2)$ definierte explizite Euler–Collatz-Verfahren für die Federpendelgleichung

$$y'' + ry' + D(y - \ell) = 0$$

mit den Anfangsdaten $y(0) = y_0$ und $y'(0) = v_0$.

(i) Untersuchen Sie experimentell die Abhängigkeit der Approximationslösungen von den Parametern r und D.

(ii) Verwenden Sie die exakte Lösung $y(t) = (v_0/\omega)e^{-rt/2}\sin(\omega t)$ mit $\omega = (D - r^2/4)^{1/2}$ des Anfangswertproblems für den Spezialfall $r = 1/10$, $D = 1$, $y_0 = \ell = 0$, $v_0 = 1$ und bestimmen Sie den Approximationsfehler $|y_K - y(t_K)|$ für die Schrittweiten $\tau = 2^{-s}$, $s = 1, 2, \ldots, 7$, zum Zeitpunkt $t_K = 100$.

(iii) Modifizieren Sie das Programm, um das explizite und implizite Euler-Verfahren zu realisieren. Vergleichen Sie das qualitative Verhalten der verschiedenen Approximationslösungen für den Zeithorizont $T = 100$. Was fällt Ihnen für große Schrittweiten auf?

Hinweis: Beim Implementieren des impliziten Euler-Verfahrens reicht es nicht, die Inkrementfunktion im Programm zu ändern. Lösen Sie stattdessen das spezifische Gleichungssystem, das durch Anwenden des Verfahrens auf die Federpendelgleichung entsteht.