



Praktische Übungen zur Vorlesung: Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 5 – 22.6.2021

Abgabe: 5.7.2021

Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss21/ndgln>

Projekt 1. Schreiben Sie ein kurzes Programm zur algorithmischen Bestimmung der Konsistenzordnung eines gegebenen linearen Mehrschrittverfahrens. Testen Sie es für das Adams-Bashforth-Verfahren und das Adams-Moulton-Verfahren, jeweils mit $m = 1, \dots, 4$ Schritten, sowie für das durch $m = 6$ und

$$\begin{aligned}[\alpha_6, \alpha_5, \dots, \alpha_0] &= \frac{1}{147} [147, -360, 450, -400, 225, -72, 10], \\ [\beta_6, \beta_5, \dots, \beta_0] &= \frac{1}{147} [60, 0, 0, 0, 0, 0, 0]\end{aligned}$$

definierte Mehrschrittverfahren.

ii) Verwenden Sie Ihr Programm um die Konsistenzordnungen der BDF-Verfahren (siehe Projekt 2) für $m = 1, \dots, 6$ zu bestimmen.

Projekt 2. Die BDF-Verfahren (*Backward Differentiation Formulas*) sind für $m \geq 1$ gegeben durch

$$\sum_{\ell=0}^m \hat{\alpha}_\ell y_{k+\ell} = \tau f(t_{k+m}, y_{k+m})$$

mit den Koeffizienten $\hat{\alpha}_m = \sum_{j=1}^m 1/j$ und

$$\hat{\alpha}_\ell = (-1)^{m-\ell} \sum_{j=m-\ell}^m \frac{1}{j} \binom{j}{m-\ell},$$

$\ell = 0, 1, \dots, m-1$.

i) Verwenden Sie eine Fixpunktiteration um die BDF-Verfahren mit $m = 1, 2, \dots, 6$ zu implementieren. Testen Sie Ihr Programm mithilfe des Anfangswertproblems $y' = f(t, y)$ in $(0, T]$, $y(0) = y_0$, mit $f(t, y) = -2y + 5 \cos(t)$, $y_0 = 2$ und $T = 1$, dessen exakte Lösung gegeben ist durch $y(t) = 2 \cos(t) + \sin(t)$.

ii) Die experimentelle Konvergenzrate zum Zeitpunkt $T = 1$ lässt sich mit dem Ansatz $e_\tau \approx c\tau^\gamma$ bestimmen, sodass für zwei verschiedene Schrittweiten τ und τ' die Approximation

$$\gamma \approx \log(e_\tau/e_{\tau'}) / \log(\tau/\tau')$$

folgt. Der Fehler e_τ zur Zeitschrittweite τ ist dabei zum Zeitpunkt $T = t_K = K\tau$ durch $e_\tau = |y(T) - y^k|$ definiert.

Stellen Sie γ für festes m und geeignete Folgen von Zeitschrittweiten grafisch dar. Was

fällt Ihnen auf, wenn Sie die experimentellen Konvergenzraten für verschiedene m mit den Konsistenzraten aus Projekt 1, ii) vergleichen?