Numerik 2

Blatt 1 – 25.4.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 11. Abgabe: 6.5.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen zu Teil I der Numerik Vorlesung, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Beurteilung begründen können. Definitionen und Notationen finden Sie im Buch Numerik 3x9.

Nr.	**Aussage**	**Beurteilung**
1	Die Subtraktion zweier Zahlen ist gut konditioniert.	
2	Ist λ ein Eigenwert von A, so gilt $\|A\| \leq |\lambda|$ für jede Operatornorm.	
3	Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist eine obere Dreiecksmatrix.	
4	Das Ausgleichsproblem besitzt stets eine Lösung.	
5	Die Lösung des Ausgleichsproblems ist bedingungslos eindeutig.	
6	Die quadratischen Matrizen A und A^T besitzen dieselben Eigenwerte und Eigenvektoren.	
7	Die Eigenschaft $a_{ii} \neq 0$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist notwendig für die Wohldefiniertheit des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens.	
8	Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonaldominant, so ist A regulär.	

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** (i) Stellen Sie die Zahlen 142, 237 und 1111 für die Basen $b = 2, 4$ und 10 mit der Präzision $p = 10$ und den Exponentenschranken $e_{min} = -10$ sowie $e_{max} = 10$ als normalisierte Gleitkommazahlen dar.
(ii) Bestimmen Sie die 25. Nachkommastelle von 1/7.
(iii) Wieso ist die Zahl 1/10 im Binärsystem nur durch eine unendliche Reihe darstellbar?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass die Menge der regulären $n \times n$-Matrizen eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert.
(ii) Zeigen Sie, dass für $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und hinreichend kleine Zahlen $h \in \mathbb{R}$ die Matrix $I_n + hE$ regulär ist mit

$$(I_n + hE)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h^k E^k.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** (i) Sei $f \in C^2([a,b])$ mit der Eigenschaft $f(a) = f(b)$ und $f'(a) = f'(b) = 0$. Geben Sie eine optimale untere Schranke für die Anzahl der Nullstellen von f'' an.
(ii) Für Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sei $w(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ das Stützstellenpolynom und L_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, das i-te Lagrange-Basispolynom. Zeigen Sie, dass gilt

$$L_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}.$$