Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 2

Blatt 2 – 9.5.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 12. Abgabe: 20.5.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $f(x) = \sin(\pi x)$ für $x \in [0,1]$, $x_0 = 0$ sowie $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$ sofern $n > 0$ gilt. Berechnen und skizzieren Sie das Interpolationspolynom von f für $n = 0, 1, \ldots, 4$. Benutzen Sie zur Berechnung das Neville-Schema.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Eigenschaften der für $t \in [-1,1]$ durch $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ definierten Funktionen:
(i) Es gilt $|T_n(t)| \le 1$ für alle $t \in [-1,1]$.
(ii) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2t\,T_n(t) - T_{n-1}(t)$$

für alle $t \in [-1,1]$. Insbesondere gilt $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$ und für $n \ge 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}$ mit $q_{n-1} \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$.
(iii) Für $n \ge 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos((j+1/2)\pi/n)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, und die $n+1$ Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** (i) Geben Sie ein ausschließlich auf arithmetischen Grundoperationen basierendes Verfahren mit möglichst wenigen Operationen zur Auswertung des Polynoms $(x+3)^{16}$ an.
(ii) Vergleichen Sie den Aufwand der direkten Auswertung des Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ mit dem unter Verwendung der äquivalenten Darstellung

$$p(x) = a_0 + x\big(a_1 + x\big(a_2 + \ldots x\big(a_{n-2} + x\big(a_{n-1} + xa_n\big)\big)\ldots\big)\big).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i = 0, 1, \ldots, n$, definierte Partitionierung von $[0,1]$ sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{1/2}$. Zeigen Sie, dass $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le cn^{-2}$ mit einer von n unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt. Skizzieren Sie f_n für $n = 2, 4, 8$.