Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 2

Blatt 2 – 23.5.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 12. Abgabe: 10.6.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass es zu jedem Intervall $[a_0, a_1] \subset \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Polynome $q_{0,0}, q_{0,1}, q_{1,0}, q_{1,1} \in \mathcal{P}_3$ gibt, sodass $q_{j,k}^{(\ell)}(a_m) = \delta_{jm}\delta_{k\ell}$ für $j, k, \ell, m = 0, 1$ gilt. Zeichnen Sie die Polynome für das Intervall $[0, 1]$.
(ii) Folgern Sie, dass auf jeder Partitionierung $\mathcal{T}_n$ mit Gitterpunkten $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zu gegebenen Werten $y_0, y_1, \ldots, y_n$ und $r_0, r_1, \ldots, r_n$ ein eindeutig definierter Spline $s \in \mathcal{S}^{3,1}(\mathcal{T}_n)$ mit $s(x_i) = y_i$ und $s'(x_i) = r_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, existiert und geben Sie eine Darstellung an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{T}_n$ eine Partitionierung des Intervalls $[a, b]$ und es seien $s \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ und $g \in C^1([a, b])$, sodass $s(x_i) = g(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ gilt. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b |g'|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{T}_n$ eine Partitionierung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und $s \in \mathcal{S}^{3,2}(\mathcal{T}_n)$ der interpolierende kubische Spline der Funktionswerte $y_0 = 1$ und $y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ mit natürlichen Randbedingungen. Zeigen Sie, dass s auf jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nur endlich viele Nullstellen besitzt und geben Sie eine möglichst genaue obere Abschätzung an. Skizzieren Sie die Funktion s.

Aufgabe 4 (Essay, 4 Punkte)**.** Schreiben Sie eine kurze Abhandlung von etwa ein bis zwei Seiten, in der Sie diverse Aspekte der numerischen Approximation von Funktionen durch Polynome diskutieren. Dabei soll z.B. eine Anwendung im Vordergrund stehen, die Sie frei wählen können.