Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 2

Blatt 4 – 13.6.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 14. Abgabe: 24.6.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (i) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\ell k 2\pi/n} = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } \ell \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $(\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}) \subset \mathbb{C}^n$ definiert durch $\omega^k = [\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \ldots, \omega_n^{(n-1)k}]^\top$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, mit der n-ten Einheitswurzel $\omega_n = e^{\mathrm{i}2\pi/n}$ die Eigenschaft $\omega^k \cdot \omega^\ell = n\delta_{k\ell}$ besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $n = 2m$. Konstruieren Sie Zahlen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, sodass mit den Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ der Lösung der zugehörigen komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe und der Funktion

$$q(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} e^{\mathrm{i}kx}$$

die Interpolationseigenschaft $q(x_j) = w_j$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ und $x_j = 2\pi j/n$ erfüllt ist.
(*Hinweis*: Dies ist nützlich für Blatt 3, Projekt 2 der praktischen Übungen.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie ohne Verwendung von Matrix-Vektor-Multiplikationen die Fourier-Synthese $y = T_8\beta$ des Vektors

$$\beta = [0, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}]^\top.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Die Quadraturformel $Q : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad $2q$ und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,\ldots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass Q exakt vom Grad $2q+1$ ist.