Numerik 2

Blatt 5 – 27.6.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 14. Abgabe: 8.7.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $Q : C^0([a,b] \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel mit $n+1$ Gewichten und Quadraturpunkten $(x_i, w_i)_{i=0,\dots,n}$, die exakt vom Grad n ist.
(i) Zeigen Sie, dass

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,\mathrm{d}x$$

für $i = 0, 1, \dots, n$ mit den durch die Stützstellen $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ definierten Lagrange-Basispolynomen $(L_i)_{i=0,\dots,n}$.
(ii) Zeigen Sie, dass im Fall der Exaktheit vom Grad $2n$ gilt, dass $w_i > 0$ für $i = 0, 1, \dots, n$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** (i) Approximieren Sie das Integral

$$I := \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

durch die Trapezregel und die Simpsonregel. Berechnen Sie die Approximationsfehler.
(ii) Approximieren Sie das Integral I durch die zugehörigen summierten Quadraturformeln mit den Teilintervallen $[a_{\ell-1}, a_\ell]$ für $\ell = 1, 2$ und Knoten $a_\ell = 1 + \ell(2-1)/2$ für $\ell = 0, 1, 2$. Berechnen Sie die Approximationsfehler und vergleichen Sie diese mit denen aus Teil (i).

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** (i) Es sei $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Raum $C^0([a,b])$. Zeigen Sie, dass mit den Initialisierungen $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = x - \beta_0$ sowie der Rekursionsvorschrift

$$p_{j+1}(x) = (x - \beta_j)p_j(x) - \gamma_j p_{j-1}(x)$$

mit den Koeffizienten $\beta_j = \langle xp_j, p_j\rangle / \langle p_j, p_j\rangle$ und $\gamma_j = \langle p_j, p_j\rangle / \langle p_{j-1}, p_{j-1}\rangle$ eine Folge von paarweise orthogonalen Polynomen $p_j \in \mathcal{P}_j$ definiert wird.
(ii) Es sei $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Gewichtsfunktion, sodass

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $C^0([a,b])$ definiert. Durch Anwenden von (i) mit diesem Skalarprodukt ist ein Orthogonalsystem mit Polynomen $\pi_j \in \mathcal{P}_j$ für $j \in \mathbb{N}_0$ definiert. Zeigen

Sie, dass π_j ein Polynom mit j Nullstellen ist.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst mit $\omega \equiv 1$ und verallgemeinern Sie ihre Argumente dann für eine beliebige Gewichtsfunktion mit den gewünschten Eigenschaften.