Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Praktische Übungen zu Numerik 2

Blatt 5 – 4.7.2022

Abgabe: 15.7.2022, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Projekt 1. (i) Implementieren Sie das Newton- und das Sekanten-Verfahren zur Nullstellensuche einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und testen Sie es mit der Funktion $f(x) = \exp(x) + x^2 - 2$, dem Startwert $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ und dem Abbruchkriterium $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-12}$. Beenden Sie das Newton-Verfahren bei Nichterreichen des Abbruchkriteriums mit 100 Iterationen. Vergleichen Sie die Iterationszahlen sowie die Anzahl der von Schritt zu Schritt beibehaltenen Nachkommastellen.
(ii) Realisieren Sie die Nullstellenbestimmung von f durch ein Gradientenverfahren für die Funktion $g(x) = |f(x)|^2$ und vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit mit der des Newton-Verfahrens.

Projekt 2. (i) Für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ kann die komplexe Ebene in Einzugsbereiche $E_j \subset \mathbb{C}$, die für $j = 1, 2, \dots, n$, durch

$$E_j = \{z \in \mathbb{C} : \text{Newton-Verfahren mit Startwert } z \text{ konvergiert gegen } z_j\}$$

definiert sind, sowie die Restmenge $X = \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^n E_j$, partitioniert werden. Betrachten Sie die Funktion $f(z) = z^3 - 1$ und verwenden Sie als Startwerte Gitterpunkte $z_\ell = x_\ell + \mathrm{i} y_\ell$, wobei $(x_\ell, y_\ell)^\top$ im Bereich $[-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ im Abstand $h = 1/200$ angeordnet sind. Markieren Sie die Punkte unterschiedlich entsprechend der Zugehörigkeit zum Einzugsbereich einer Nullstelle und stellen Sie diese grafisch dar. Verwenden Sie dazu die Matlab-Befehle `[X,Y] = meshgrid(-1:h:1,-1:h:1);` sowie `scatter(X(:),Y(:),15,C(:));` mit einer geeignet definierten Matrix `C`.
(ii) Verallgemeinern Sie Ihre Implementation des Newton-Verfahrens, sodass nun auch Nullstellen von mehrdimensionalen Funktionen approximiert werden können. Verwenden Sie es, um eine Nullstelle der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 - e, 3x_2 + 4x_3 - \sqrt{5}, x_1^2 - \pi/4)$$

zu approximieren. Wie lässt sich die Lösbarkeit beurteilen und ein sinnvoller Startwert konstruieren?
Hinweis: Stellen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens so um, dass in jedem Schritt ein Gleichungssystem gelöst werden muss und approximieren Sie dessen Lösung mit dem Matlab-Befehl `x = A\b`.