Prof. Dr. Sören Bartels, Tatjana Schreiber May 21th, 2025

Algorithmic Aspects of Data Analytics and Machine Learning

SS 2025 — Sheet 5

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss25/algml/index.html`

Due: May 30, 2025, 2 p.m.

Task 1 (5 points)

Consider the one-dimensional Poisson problem on the interval $[0, 1]$:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad \text{with } u(0) = u(1) = 0.$$

Discretize the interval into $n+1$ equally spaced grid points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, with spacing $h = \frac{1}{n}$. The values at the boundary x_0 and x_n are fixed due to the boundary conditions.

(i) Show that for every $v \in C_0^1(0,1) := \{v \in C^1(0,1) \mid v(0) = v(1) = 0\}$, the following identity holds:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

(ii) Derive the tridiagonal matrix $S_h \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ that represents the central difference approximation

$$(S_hU)_i = -\frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

for every $U = (u_1, \ldots, u_{n-1})^\top$. We define $u_0 = u_n = 0$.

(iii) Show that

$$\frac{1}{2}U^\top S_h U = \frac{1}{2h^2}\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1} - u_i)^2.$$

and interpret this identity by comparing it to the continous setting.

Lösung:

(i) Multipliziere und integriere die Gleichung

$$-\int_0^1 u''(x)\,v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx.$$

Partieller Integration (Randterm fällt weg, wegen Nullrandbedingungen)

$$\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx.$$

(ii) Es gilt

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}.$$

Also $S_hU = F_h$ mit tridiagonal Matrix

$$S_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (S_hU)_i = \frac{1}{h^2}\big(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\big).$$

(iii) Mit der obigen Matrix gilt (man bekommt da zwei Summen, die aber mit Indexverschiebung gleich sind)

$$U^\top S_h U = \frac{1}{h^2}\Big(2\sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2} u_i u_{i+1}\Big) = \frac{1}{h^2}\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)^2.$$

Also

$$\frac{1}{2}U^\top S_h U = \frac{1}{2h^2}\sum_{i=0}^{n-1}\big(u_{i+1}-u_i\big)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)^2$$

Es gilt

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)^2 \approx \frac{1}{2}\int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\,dx.$$

Das ist der Term aus Aufgabenteil (i) mit $v = u$. Das ist also die diskrete Version davon und der Ausdruck links ist eine Art Riemansumme der Energie.

Task 2 (3 points)

Let $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ be differentiable and satisfy

$$y'(t) \leq ay(t) \quad \text{for all } t \in [0, T],$$

with a constant $a \in \mathbb{R}$.
Show that

$$y(t) \leq y(0)e^{at} \quad \text{for all } t \in [0, T].$$

Lösung:

Lemma von Gronwall (vgl zB Numerik 3x9)
Betrachte

$$z(t) = e^{-at}y(t).$$

Ableiten

$$z'(t) = e^{-at}y'(t) - ae^{-at}y(t) = e^{-at}\left(y'(t) - ay(t)\right).$$

Da $y'(t) \leq ay(t)$, ist

$$z'(t) \leq 0.$$

Also ist$z(t)$ nicht steigende. Da $z(0) = y(0)$, gilt für alle $t \in [0, T]$

$$z(t) \leq z(0) = y(0),$$

also

$$e^{-at}y(t) \leq y(0),$$

und damit

$$y(t) \leq y(0)e^{at}.$$

Task 3 (4 points)

Let $\Omega = (0,1)^d$ for $d = 1$ or $d = 2$, and let $v \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfy $v = 0$ on the boundary $\partial\Omega$. Show that there exists a constant $c_P > 0$ (depending only on Ω) such that

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Hint: For $d = 1$, use that

$$v(x) = \int_0^x v'(s)\, ds.$$

Lösung:

Spezialfall der Poincare Ungleichung
Hinweis:

$$v(x) = \int_0^x v'(s)\, ds.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung/ Höldern:

$$|v(x)|^2 = \left(\int_0^x v'(s)\, ds\right)^2 \leq x \int_0^x |v'(s)|^2\, ds.$$

Integriere auf beiden Seiten:

$$\int_0^1 |v(x)|^2\, dx \leq \int_0^1 x \left(\int_0^x |v'(s)|^2\, ds\right) dx.$$

Vertauschen der Integration (also Fubini):

$$\int_0^1 x \left(\int_0^x |v'(s)|^2\, ds\right) dx = \int_0^1 |v'(s)|^2 \left(\int_s^1 x\, dx\right) ds.$$

Mit

$$\int_s^1 x\, dx = \frac{1}{2} - \frac{s^2}{2}.$$

folgt

$$\int_0^1 |v(x)|^2\, dx \leq \int_0^1 |v'(s)|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2}\right) ds \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |v'(s)|^2\, ds.$$

Insgesamt

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v'\|_{L^2(0,1)}.$$

Wähjle $c_P = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Jetzt $d = 2$ (Idee: integriere erst in eine Richtung und wende $d = 1$ an): Für festes $y \in (0,1)$ ist $v(\cdot, y) \in C^1([0,1])$ mit $v(0,y) = v(1,y) = 0$, was gerade der Fall von oben ist

$$\int_0^1 |v(x,y)|^2\, dx \leq c_1^2 \int_0^1 |\partial_x v(x,y)|^2\, dx.$$

Integrieren wir das jetzt über y

$$\int_0^1 \int_0^1 |v(x,y)|^2\, dx\, dy \leq c_1^2 \int_0^1 \int_0^1 |\partial_x v(x,y)|^2\, dx\, dy.$$

Analog in y-Richtung, also

$$\int_0^1 \int_0^1 |v(x,y)|^2\, dy\, dx \leq c_1^2 \int_0^1 \int_0^1 |\partial_y v(x,y)|^2\, dy\, dx.$$

Addition ergibt (alle Funktionen sind schön genug, um Integrationsreihenfolge zu tauschen)

$$\int_\Omega |v|^2\, dx \leq c_1^2 \left(\int_\Omega |\partial_x v|^2 + |\partial_y v|^2\, dx\right) = c_1^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Also

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

mit $c_P = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (oft sieht man auch $c_P = \sqrt{2}$).

Task 4 (4 points)

(i) Let G be a d-regular graph (i.e. $\deg(v) = d$ for every vertex) with adjacency matrix A and Laplacian L. Prove that μ is an eigenvalue for A iff $(d - \mu)$ is an eigenvalue for L.

(ii) Let G be a d-regular graph, let L be the (unnormalized) Laplacian, and let $\mathcal{L}$ be the normalized Laplacian (i.e. $\mathcal{L} = D^{-1/2} L D^{-1/2}$). Show that λ is an eigenvalue of L iff $\dfrac{\lambda}{d}$ is an eigenvalue of $\mathcal{L}$.

Lösung:

(i) **$\Rightarrow$:** Angenommen $Av = \mu v$. Dann

$$Lv = (dI - A)v = dv - \mu v = (d - \mu)v.$$

$\Leftarrow$: Angenommen $Lv = \lambda v$. Dann

$$Av = (dI - L)v = dv - \lambda v = (d - \lambda)v.$$

Somit ist v gleichzeitig Eigenvektor von A und L.

(ii) Für einen d-regulären Graphen gilt $D = dI$ und daher

$$\mathcal{L} = D^{-1/2} L D^{-1/2} = \tfrac{1}{\sqrt{d}} I \, L \, \tfrac{1}{\sqrt{d}} I = \frac{1}{d} L.$$

Ist $Lv = \lambda v$, so $\mathcal{L}v = \frac{1}{d} Lv = \frac{\lambda}{d} v$. Ist $\mathcal{L}v = \mu v$, so $Lv = d\mu v$.

Das sind natürlich beides nur Spezialfälle und gilt nicht für allgemeine Graphen.