Übung zur Vorlesung

Numerik II

SS 2025 — Blatt 1

<https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss25/num/index.html>

Aufgabe 1

(2+2+2+1 Punkte)

- (i) Berechnen Sie die Anzahl der Gleitkommazahlen sowie die positiven Extrema g_{min} und g_{max} für die IEEE-Formate *single* und *double precision*.
- (ii) Wie viele *double* Zahlen gibt es, zwischen benachbarten *single* Zahlen?
- (iii) Sei G eine Menge von Gleitkommazahlen mit Präzision $p \geq 1$. Was ist die kleinste ganze Zahl, die nicht in G enthalten ist?
- (iv) Wie lautet diese Zahl insbesondere für Maschinenzahlen in *single* bzw. *double* Format? Wie würden Sie dies mithilfe eines Computers überprüfen?

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Es bezeichne $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(p, q) = (x_1, x_2)$, die Aufgabe der Bestimmung der Nullstellen x_1, x_2 des quadratischen Polynoms $x^2 + px + q$. Bestimmen Sie eine Teilmenge $W \subset \mathbb{R}$, auf der ϕ wohldefiniert ist, berechnen Sie für $(p, q) \in W$ die relative Konditionszahl $\kappa_\phi(p, q)$ und diskutieren Sie, für welche Paare (p, q) die Aufgabe gut konditioniert ist.

Aufgabe 3

(2+1 Punkte)

- (i) Beweisen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ in Gleitkommaarithmetik konvergiert.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Gleitkommaaddition $+_G$ nicht assoziativ ist.

Aufgabe 4

(2+1+3 Punkte)

Es bezeichne ϕ die Aufgabe der Bestimmung der Singulärwertzerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, d.h. man sucht Matrizen $U \in O(m)$, $V \in O(n)$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen, sodass $A = U\Sigma V^\top$.

- (i) Was heißt, dass ein Algorithmus $\tilde{\phi}$ zur Lösung von ϕ stabil bzw. rückwärtsstabil ist?
- (ii) Ein Algorithmus für diese Aufgabe kann nicht rückwärtsstabil sein. Warum?
- (iii) Zeigen Sie, dass die Aufgabe zur Berechnung des dyadischen Produkts $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\phi(x, y) = xy^\top$, gut konditioniert ist. Beantworten Sie (a) und (b) in diesem Fall.

Abgabe: Mittwoch, 7.5., 14:00 Uhr (in den Briefkästen im Rechenzentrum).